CAPÍTULO XI. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

SECCIONES

A. Áreas de figuras planas.

B. Cálculo de volúmenes.

C. Longitud de curvas planas.

D. Ejercicios propuestos.

A. ÁREAS DE FIGURAS PLANAS.

En Geometría Elemental se conocen las fórmulas para hallar el área de cualquier región limitada por una poligonal cerrada. Ahora bien, si una región está limitada por alguna línea curva, como es el círculo, el área se expresa como un límite de las áreas de poligonales "próximas". El procedimiento descrito en el capítulo anterior para definir el concepto de integral de una función consiste precisamente en aproximar la función por funciones escalonadas; si consideramos una función $y = f(x)$ no negativa en un intervalo $[a, b]$, la integral inferior es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos en la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$, y la integral superior es el límite de las áreas de los rectángulos circunscritos a dicha región. De este modo podemos definir el área de dicha región como la integral de la función f en el intervalo $[a, b]$. En general,

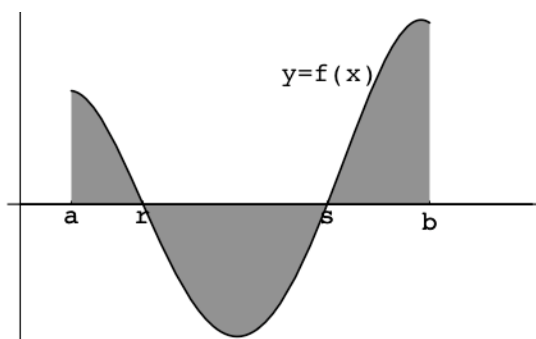
Dada una función $y = f(x)$ integrable en un intervalo $[a, b]$, el área de la región limitada por la función, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ se define como

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Observación: El valor absoluto de la función es debido a que en los intervalos donde la función es negativa, la integral también es negativa y su valor es opuesto al del área correspondiente.

En la práctica, para eliminar el valor absoluto en el integrando, debemos determinar los intervalos de $[a, b]$ donde la función es positiva o negativa y descomponer la integral en suma de integrales correspondientes a cada uno de los intervalos indicados colocando el signo adecuado. Así, en la figura adjunta, el área se expresa como

$$A = \int_a^r f(x)\,dx - \int_r^s f(x)\,dx + \int_s^b f(x)\,dx.$$



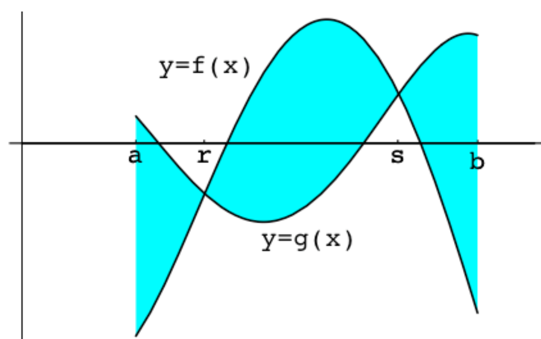
En particular, si la función está expresada en forma paramétrica $x = x(t),\ y = y(t)$, el área viene expresada como

$$A = \int_a^b y\ dx = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot x'(t)\ dt,$$

donde $a = x(t_0),\ b = x(t_1)$.

Regiones más generales que las descritas son aquellas que están limitadas por dos funciones $y = f(x),\ y = g(x)$ entre dos rectas verticales $x = a$ y $x = b$. En este caso el área se expresa mediante la fórmula

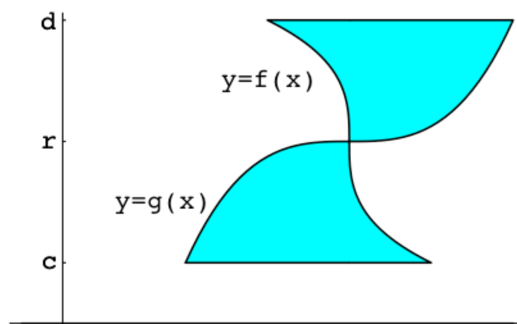
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx.$$



En el ejemplo de la figura, el área se descompone como:

$$A = \int_a^r [g(x) - f(x)]\ dx + \int_r^s [f(x) - g(x)]\ dx + \int_s^b [g(x) - f(x)]\ dx.$$

Si la región está limitada por dos curvas $y = f(x),\ y = g(x)$ entre dos rectas horizontales $y = c$ e $y = d$, consideramos las funciones inversas e integramos respecto a la variable y. El área se expresa entonces como $A = \int_c^d |f^{-1}(y) - g^{-1}(y)|\ dy$.



En el ejemplo de la figura, dicha integral se descompone como

$$A = \int_c^r [f^{-1}(y) - g^{-1}(y)]\ dy + \int_r^d [g^{-1}(y) - f^{-1}(y)]\ dy.$$

En los ejercicios que siguen veremos ejemplos de todas las situaciones planteadas. Al ser válidas aquí todas las propiedades de las integrales obtenidas en el capítulo anterior, aplicaremos siempre los teoremas fundamentales de la integral. Omitiremos en la mayoría de los casos el cálculo de las primitivas pues ya se han realizado en el capítulo 7. Nos limitaremos a escribir el resultado de dicha primitiva y a indicar las sustituciones en los extremos de integración. Sí es muy conveniente tener una idea aproximada de la representación gráfica de las funciones involucradas para conocer la posición relativa de las mismas y los intervalos de integración. Es importante también observar las simetrías de las figuras para así poder escribir fórmulas más sencillas para el área de las mismas.

PROBLEMA 11.1

Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje X en el intervalo indicado:

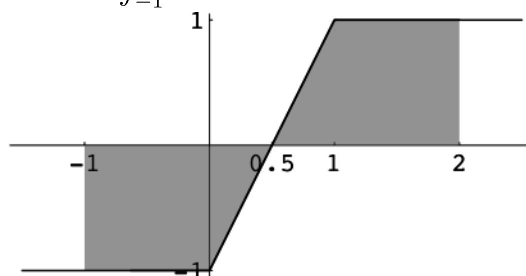
a) $f(x) = |x| - |x-1|$ en $[-1, 2]$.

b) $f(x) = x(\ln x)^2$ en $[1, e]$.

c) $f(x) = e^{-x}|\operatorname{sen} x|$ en $[0, 2\pi]$.

Solución

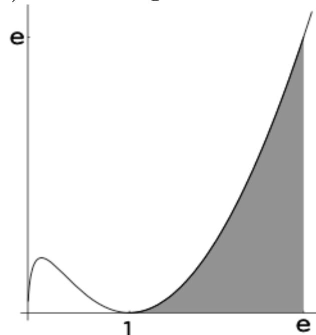
a) El área de la región (que es la parte sombreada de la figura) viene dada por la fórmula $A = \int_{-1}^{2} \big||x| - |x-1|\big| \, dx$.



Teniendo en cuenta el signo de la función, la integral se descompone así:

$$A = \int_{-1}^{0} 1 \cdot dx + \int_{0}^{0,5} -(2x-1)\, dx + \int_{0,5}^{1} (2x-1)\, dx + \int_{1}^{2} 1 \cdot \, dx = \frac{5}{2}.$$

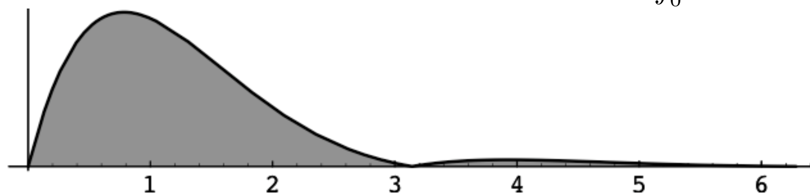
b) La función $y = x(\ln x)^2$ es no negativa en el intervalo $[1, e]$.



El área es entonces, integrando por partes,

$$A = \int_1^e x(\ln x)^2\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\cdot \ln x + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2-1}{4}.$$

c) Nuevamente la función es no negativa, por lo que $A = \int_0^{2\pi} e^{-x}|\operatorname{sen} x|\, dx$.



Para integrar descomponemos en dos sumandos y tenemos:

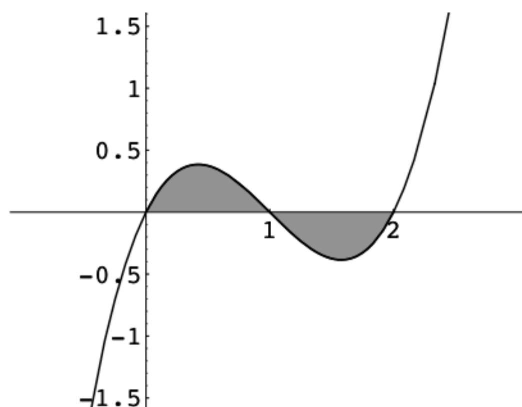
$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} e^{-x}|\operatorname{sen} x|\, dx = \int_0^{\pi} e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx \\ &= \left[-\frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)\right]_0^{\pi} + \left[\frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{(e^{-\pi}+1)^2}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.2

Hallar el área de la figura limitada por la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX.

Solución

Como la curva corta al eje OX en los puntos de abscisa $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$, el área viene dada por $A = \int_0^2 |f(x)|\, dx$.



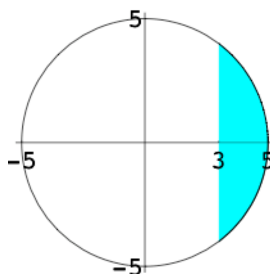
Ahora bien, en el intervalo $[0, 1]$ la curva queda por encima del eje X mientras que en el intervalo $[1, 2]$ queda por debajo del mismo. Tenemos pues

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 -f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

PROBLEMA 11.3

Hallar el área del menor de los sectores que la recta $x = 3$ determina en la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$.

Solución



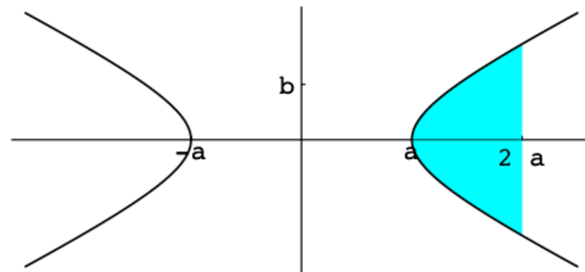
Teniendo en cuenta la simetría de la figura basta calcular el área de la región contenida en el primer cuadrante. Tenemos

$$\begin{aligned} A &= 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx \\ &= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{5}\right]_3^5 = \frac{25\pi}{2} - 12 - 25\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.4

Hallar el área de la figura limitada por la recta $x = 2a$ y la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución



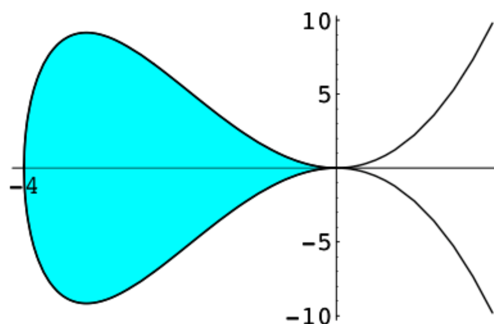
De acuerdo con la figura, el área se obtiene como

$$\begin{aligned} A &= 2\int_a^{2a} b\sqrt{(x/a)^2 - 1}\, dx \\ &= \left[\frac{bx}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - ab\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right|\right]_a^{2a} = ab[2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})]. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.5

Hallar el área limitada por la curva $y^2 = x^4(4 + x)$.

Solución



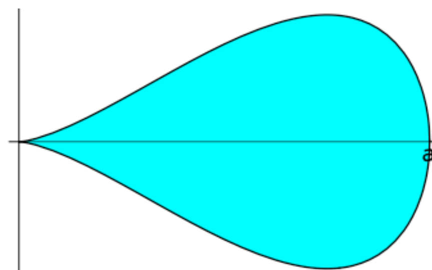
Como la figura está determinada por el intervalo $x \in [-4, 0]$ y es simétrica respecto al eje X, el área será

$$A = 2\int_{-4}^{0} x^2\sqrt{4 + x}\, dx = \left[4(4 + x)^{3/2}\left(\frac{(4 + x)^2}{7} - \frac{8(4 + x)}{5} + \frac{16}{3}\right)\right]_{-4}^{0} = \frac{4096}{105}.$$

PROBLEMA 11.6

Hallar el área limitada por la curva $x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0$.

Solución



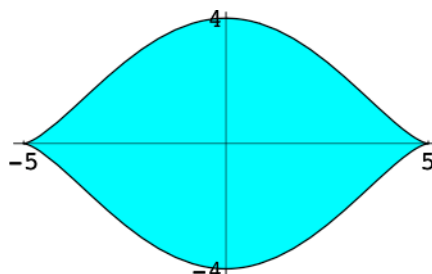
La curva está definida cuando $x \in [0, a]$ y es simétrica respecto a OX. El área viene dada por:

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^a \frac{x}{b}\sqrt{ax - x^2}\, dx = \text{ (cambio } (a/2)\cos t = x - a/2) \\ &= \frac{a^3}{4b}\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 t \cdot (1 + \cos t)\, dt = \frac{a^3}{4b}\left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi a^3}{8b}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.7

Hallar el área de la figura limitada por la curva $(x/5)^2 + (y/4)^{2/3} = 1$.

Solución



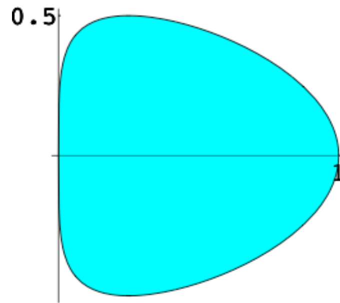
El área de la figura, teniendo en cuenta sus simetrías, es

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^5 4(1 - x^2/25)^{3/2}\, dx = \text{ (cambio } x = 5\cos t) \ = 16\int_0^{\pi/2} 5\operatorname{sen}^4 t\, dt \\ &= 20\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)^2\, dt = 20\left[\frac{3t}{2} - \operatorname{sen} 2t + \frac{\operatorname{sen} 4t}{8}\right]_0^{\pi/2} = 15\pi. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.8

Hallar el área limitada por la curva $x = (y^2 + x)^2$.

Solución



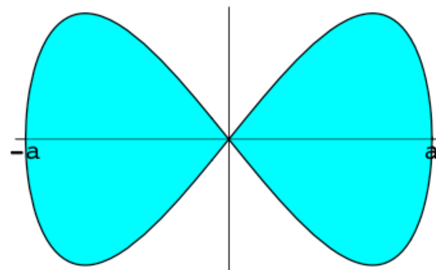
En forma explícita, la ecuación de la curva es $y = \pm\sqrt{\sqrt{x} - x}$. Como la gráfica es simétrica respecto al eje OX, el área viene dada por

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^1 \sqrt{\sqrt{x} - x}\, dx = \ (\text{cambio } \frac{1}{2} - \sqrt{x} = \frac{\operatorname{sen} t}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \cdot (1 - \operatorname{sen} t)\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.9

Hallar el área encerrada por la curva $y^2 = \dfrac{x^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

Solución



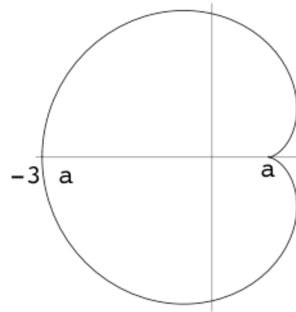
De acuerdo con la figura y gracias a la simetría, tenemos:

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^a \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \ (\text{cambio } x = a \operatorname{sen} t) \ = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t\, dt \\ &= 4a^2 \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{4a^2}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.10

Hallar el área de la figura limitada por la cardioide de ecuación $x(t) = a(2\cos t - \cos 2t),\ y(t) = a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$.

Solución



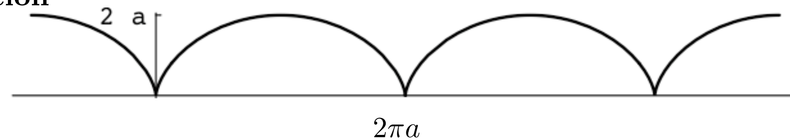
Como la figura es simétrica respecto al eje OX, el área viene dada por

$$\begin{aligned} A &= 2\int_{-3a}^{a} y \cdot dx = 2\int_{\pi}^{0} y(t)x'(t)\ dt \\ &= 2\int_{\pi}^{0} a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)2a(\operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t)\ dt \\ &= 4a^2\left[\frac{-3t}{2} + 2\operatorname{sen}^3 t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4t}{8}\right]_{\pi}^{0} = 6\pi a^2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.11

Hallar el área comprendida entre un lazo de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t),\ y = a(1 - \cos t)$ y el eje OX.

Solución



$2\pi a$

Integrando respecto a la variable t, como un lazo de la cicloide se encuentra en el intervalo $t \in [0, 2\pi]$, resulta:

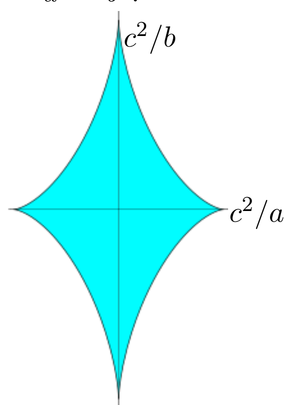
$$\begin{aligned} A &= \int_{0}^{2\pi a} y(t)\ dx(t) = \int_{0}^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)\ dt \\ &= a^2\left[\frac{3t}{2} - 2\operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_{0}^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.12

Hallar el área encerrada por la astroide de ecuación $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$.

Solución

Escribimos la ecuación en forma paramétrica como $x(t) = (c^2/a)\cos^3 t$, $y(t) = (c^2/b)\operatorname{sen}^3 t$, donde $c^2 = a^2 - b^2$.



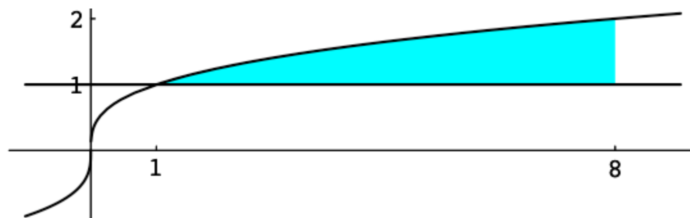
Teniendo en cuenta la simetría de la figura podemos escribir el área como

$$
\begin{aligned}
A &= 4\int_0^{c^2/a} y\cdot dx = 4\int_{\pi/2}^{0} (c^2/b)\operatorname{sen}^3 t\cdot(c^2/a)(-3\cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt \\
&= \frac{12c^4}{ab}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t\cos^2 t\,dt = \frac{12c^4}{ab}\left[\frac{t}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4t}{64} - \frac{\operatorname{sen}^3 2t}{48}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi c^4}{8ab}.
\end{aligned}
$$

PROBLEMA 11.13

Hallar el área de la figura limitada por la curva $y^3 = x$, la recta $y = 1$ y la vertical $x = 8$.

Solución



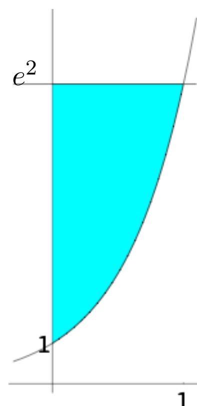
Como la recta $y = 1$ corta a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ y en el intervalo $[1, 8]$ la curva queda por encima de la recta, el área viene dada por

$$A = \int_1^8 (x^{1/3} - 1)\,dx = \left[\frac{3\,x^{4/3}}{4} - x\right]_1^8 = \frac{17}{4}.$$

> **PROBLEMA 11.14**
>
> Calcular el área limitada por la curva $y = e^{2x}$ y las rectas $y = e^2$, $x = 0$.

Solución

En este caso, la recta $y = e^2$ queda por encima de la curva $y = e^{2x}$ en la región comprendida entre los valores $x = 0$ y $x = 1$.

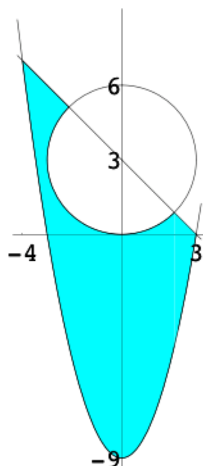


El área se obtiene como

$$A = \int_0^1 (e^2 - e^{2x})\,dx = \left[e^2x - \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = e^2 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2+1}{2}.$$

> **PROBLEMA 11.15**
>
> Hallar el área de la región $y \geq x^2 - 9,\ x^2 + (y-3)^2 \geq 9,\ y \leq -x + 3.$

Solución



El centro de la circunferencia es el punto $(0,3)$ por el cual pasa la recta $y = -x + 3$. Esto quiere decir que la recta es un diámetro y el área de la figura sombreada es la diferencia entre el área de la región comprendida entre dicha recta y la parábola y el área del semicírculo de radio 3. Los puntos de intersección de la parábola y la recta se obtienen del sistema

$$y = x^2 - 9,\ y = -x + 3 \Longrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 3,\ x = -4.$$

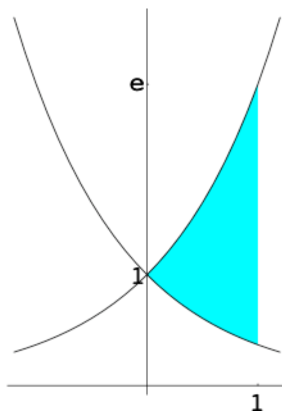
Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{3} [(-x+3) - (x^2 - 9)]\, dx - \frac{9\pi}{2} = \int_{-4}^{3} (-x^2 - x + 12)\ dx - \frac{9\pi}{2} \\ &= \left[12x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3} - \frac{9\pi}{2} = \frac{343}{6} - \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.16

Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

Solución



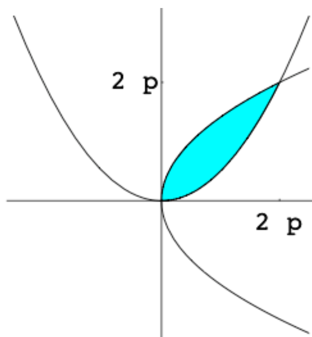
Como en el intervalo $x \in [0,1]$ la curva $y = e^x$ queda por encima de la curva $y = e^{-x}$, el área viene dada por

$$A = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\, dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = e + e^{-1} - 2.$$

PROBLEMA 11.17

Hallar el área comprendida entre las parábolas $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$.

Solución



Como los puntos de intersección de ambas parábolas son $(0,0)$ y $(2p, 2p)$, el área viene dada por la integral:

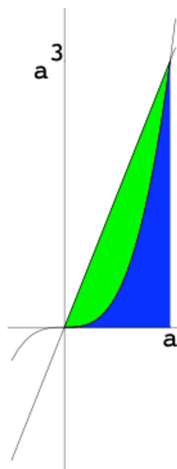
$$A = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)\, dx = \left[\sqrt{2p} \cdot \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{6p}\right]_0^{2p} = \frac{4p^2}{3}.$$

PROBLEMA 11.18

Dada la curva de ecuación $y = x^3$ y la recta $y = \lambda x$ (ver figura), demostrar que la región S_1 limitada por la curva y la recta en el intervalo $x \in [0, a]$ tiene la misma área que la región S_2 limitada por la curva y el eje X en el mismo intervalo.

Solución

Como la recta pasa por el punto (a, a^3), se debe cumplir que $a^3 = \lambda a$, es decir $\lambda = a^2$.



Al calcular cada una de las áreas mencionadas obtenemos

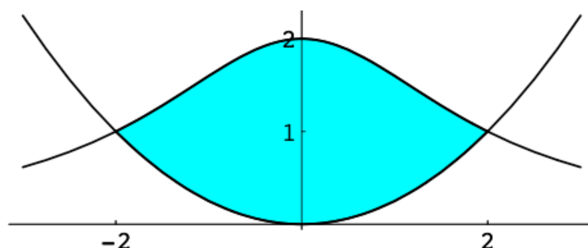
$$S_1 = \int_0^a (\lambda x - x^3)\,dx = \left[\frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{2\lambda a^2 - a^4}{4} = \frac{a^4}{4},$$
$$S_2 = \int_0^a x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^4}{4},$$

lo que prueba el enunciado.

PROBLEMA 11.19

Hallar el área de la figura encerrada por la parábola $y = x^2/4$ y la curva de Agnesi $y = \dfrac{8}{x^2+4}$.

Solución



Los puntos de intersección de ambas curvas son solución del sistema formado por ambas ecuaciones. Tenemos que:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4} \iff x^4 + 4x^2 = 32 \iff x^2 = -2 \pm \sqrt{4+32} = -2 \pm 6.$$

Como la solución $x^2 = -8$ no es real, sólo es posible $x^2 = 4 \iff x = \pm 2$. El área es entonces, teniendo en cuenta la simetría de la figura,

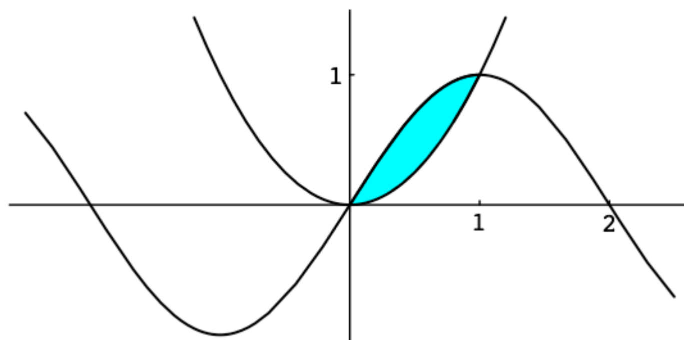
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} \left[\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right] dx = 2\int_0^2 \left[\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right] dx \\ &= 2\left[4 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = 2\pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.20

Calcular el área limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$.

Solución

Como se observa en la figura, la región que limitan dichas curvas se encuentra en el intervalo $[0,1]$ en el cual la función $y = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$ queda por encima de $y = x^2$.



El área es entonces

$$A = \int_0^1 \left[\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} - x^2\right] dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}.$$

PROBLEMA 11.21

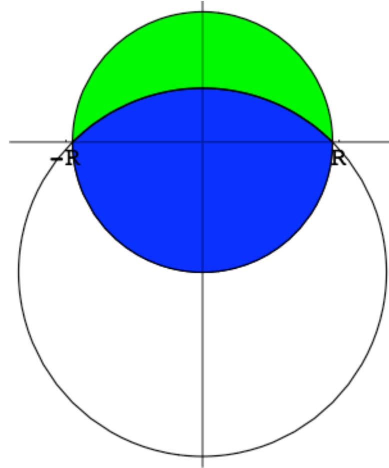
Calcular el área de los dos trozos en que la circunferencia $x^2+(y+R)^2 = 2R^2$ divide a la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

Solución

Los puntos de intersección de ambas curvas son:

$x^2+y^2 = R^2,\ x^2+y^2+2Ry+R^2 = 2R^2 \Longrightarrow 2Ry = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow x = \pm R,$

y las regiones que limitan son las indicadas en la figura.



Las áreas de ambas regiones son:

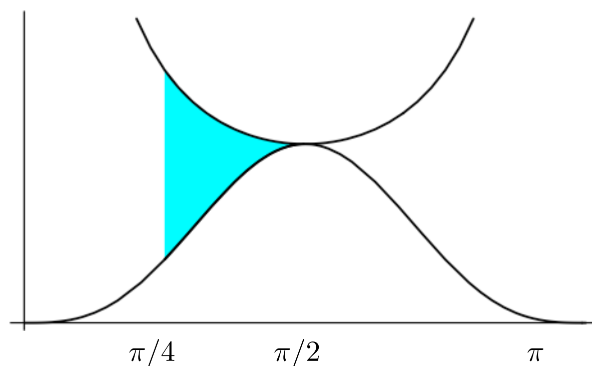
$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2-x^2} - \sqrt{2R^2-x^2} + R\right)\, dx \\ &= \left[\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2} + \frac{R^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R} \\ &\qquad - \left[\frac{x\sqrt{2R^2-x^2}}{2} + R^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{R\sqrt{2}}\right]_{-R}^{R} + [Rx]_{-R}^{R} = R^2; \\ A_2 &= \pi R^2 - A_1 = (\pi-1)R^2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.22

Calcular el área comprendida entre las curvas $y = \operatorname{sen}^3 x$, $y = 1/\operatorname{sen} x$, para $x \in [\pi/4, \pi/2]$.

Solución

En el intervalo indicado, la curva $y = 1/\operatorname{sen} x$ queda por encima de $y = \operatorname{sen}^3 x$.



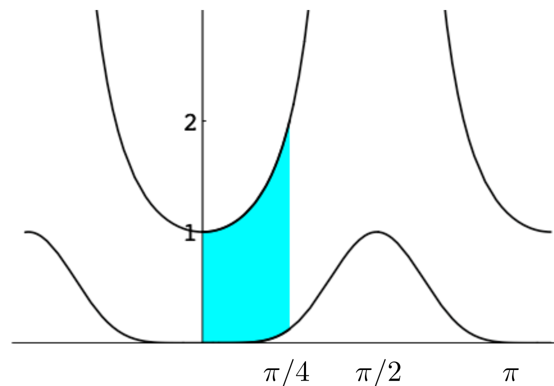
$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen}^3 x \right) dx \\ &= \left[\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\ln(\sqrt{2} - 1) - \frac{5\sqrt{2}}{12}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.23

Calcular el área comprendida entre las curvas $y = 1/\cos^2 x$, $y = \operatorname{sen}^6 x$ para $x \in [0, \pi/4]$.

Solución

En este caso también la curva $y = 1/\cos^2 x$ queda por encima de $y = \operatorname{sen}^6 x$. Bastará pues integrar la resta de ambas funciones en el intervalo indicado.



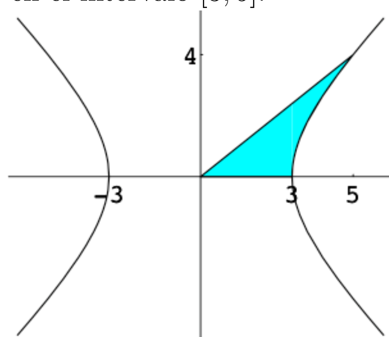
$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \operatorname{sen}^6 x)\, dx \\
&= \left[\operatorname{tg} x - \frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{3}{64}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x \right]_0^{\pi/4} = \frac{59}{48} - \frac{5\pi}{64}.
\end{aligned}
$$

PROBLEMA 11.24

Hallar el área de la figura comprendida entre la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 9$, el eje OX y la recta que une el origen con el el punto $(5, 4)$.

Solución

El área de la región se puede obtener como la resta entre el área del triángulo de vértices $O(0,0)$, $A(5,0)$ y $B(5,4)$ y el área de la región limitada por la hipérbola y el eje OX en el intervalo $[3, 5]$.



Tenemos pues:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{5 \cdot 4}{2} - \int_3^5 \sqrt{x^2 - 9}\, dx \\
&= 10 - \left[\frac{x\sqrt{x^2 - 9}}{2} - \frac{9}{2}\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 9}}{3} \right) \right]_3^5 = \frac{9}{2}\ln 3.
\end{aligned}
$$

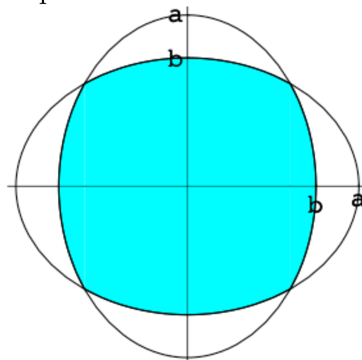
PROBLEMA 11.25

Determinar el área de la parte común a las dos elipses

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ con $a > b$.

Solución

Debido a la simetría de la región (ver figura), basta calcular el área de la región comprendida en el primer cuadrante.



El punto de intersección de las elipses tiene abscisa $x = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, con lo que el área pedida es

$$\begin{aligned}
A &= 4\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} b\sqrt{1-x^2/a^2}\,dx + 4\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b} a\sqrt{1-x^2/b^2}\,dx \\
&= \frac{4b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} + \frac{4a}{b}\left[\frac{b^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{b}+\frac{x}{2}\sqrt{b^2-x^2}\right]_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b} \\
&= 2ab\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \operatorname{arc\,sen}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

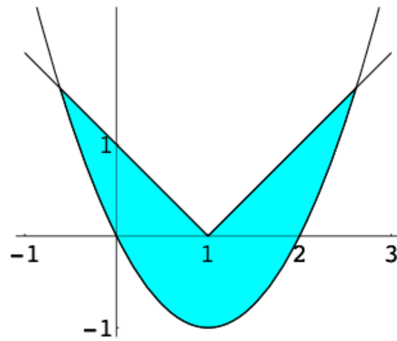
PROBLEMA 11.26

Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = |x-1|$ *y* $g(x) = x^2-2x$.

Solución

Los puntos de intersección de las curvas son:

$$\begin{aligned}
y = |x-1|,\ y = x^2-2x \quad &\Longrightarrow |x-1| = x^2-2x \\
&\Longrightarrow \begin{cases} x-1 = x^2-2x & \text{si } x>1 \\ -x+1 = x^2-2x & \text{si } x<1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$



Debido a la simetría de la figura, el área se puede expresar como:

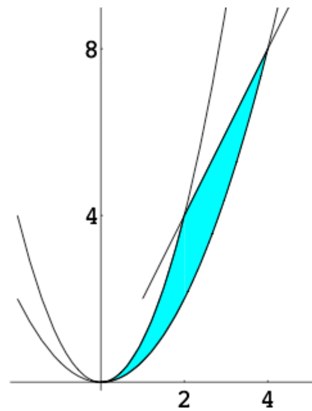
$$A = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} [|x-1|-(x^2-2x)]\,dx = 2\int_1^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} [(x-1)-(x^2-2x)]\,dx = \frac{7+5\sqrt{5}}{6}.$$

PROBLEMA 11.27

Calcular el área de la figura limitada por la parábolas $y = x^2$, $y = x^2/2$ y la recta $y = 2x$.

Solución

La primera parábola $y = x^2$ corta a la recta en el punto de abscisa $x = 2$ mientras que la segunda parábola $y = x^2/2$ corta a la recta en el punto de abscisa $x = 4$.



El área se descompone entonces como suma de integrales de la siguiente forma:

$$A = \int_0^2 (x^2 - x^2/2)\,dx + \int_2^4 (2x - x^2/2)\,dx = 4.$$

PROBLEMA 11.28

Calcular el área de la región limitada por las gráficas de f y g en el intervalo que se indica en cada caso:

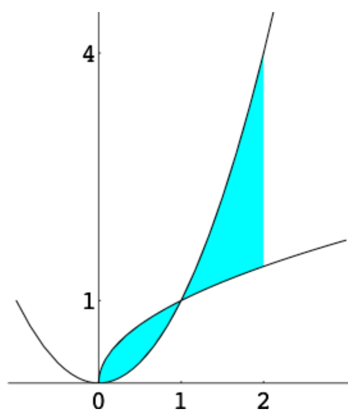
a) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x^2$ en $[0, 2]$.

b) $f(x) = x(x^2 - 1),\ g(x) = x$ en $[-1, 2]$.

Solución

a) Los puntos de intersección de las curvas son

$$y = \sqrt{x},\ y = x^2 \Longrightarrow x = x^4 \Longrightarrow x = 0,\ x = 1.$$

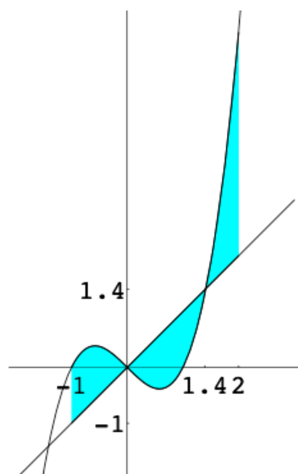


El área se descompone entonces como la suma

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx + \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})\, dx = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

b) Los puntos de intersección de las curvas son:

$$y = x(x^2 - 1),\ y = x \Longrightarrow x(x^2 - 1) = x \Longrightarrow x = 0,\ x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}.$$



El área se obtiene entonces como:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} |x(x^2-1)-x|\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x^3-2x)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} (2x-x^3)\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} (x^3-2x)\,dx = \frac{11}{4}.
\end{aligned}
$$

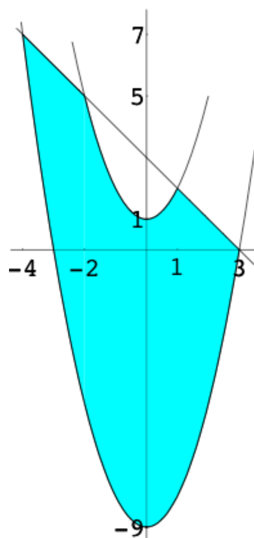
PROBLEMA 11.29

Calcular el área limitada por las regiones $y \le x^2+1,\ y \ge x^2-9,$ $y \le 3-x$.

Solución

Calculamos los puntos de intersección de las curvas:

$$
\begin{aligned}
y = x^2+1,\ y = 3-x &\Longrightarrow x^2+x-2=0 \Longrightarrow x=-2,\ x=1; \\
y = x^2-9,\ y = 3-x &\Longrightarrow x^2+x-12=0 \Longrightarrow x=-4,\ x=3.
\end{aligned}
$$



El área queda entonces como la suma de las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{-2} [(3-x)-(x^2-9)]\,dx + \int_{-2}^{1} [(x^2+1)-(x^2-9)]\,dx \\ &\quad + \int_{1}^{3} [(3-x)-(x^2-9)]\,dx \\ &= \int_{-4}^{-2} (-x^2-x+12)\,dx + \int_{-2}^{1} 10\,dx + \int_{1}^{3} (-x^2-x+12)\,dx = \frac{158}{3}. \end{aligned}$$

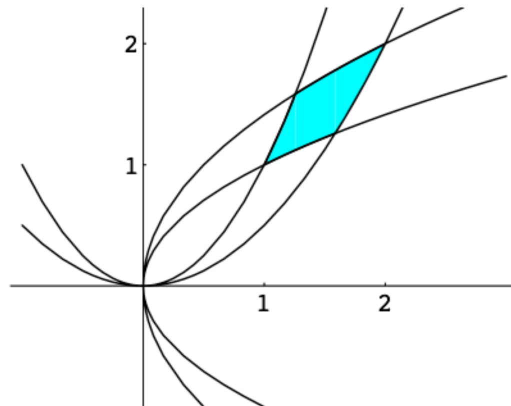
PROBLEMA 11.30

Calcular el área comprendida entre las cuatro parábolas $y^2 = x,\ y^2 = 2x,\ x^2 = y,\ x^2 = 2y.$

Solución

Los distintos puntos de intersección son los siguientes:

$$\begin{aligned} x^2 = 2y,\ y^2 = x &\implies x = 0,\ x = 4^{1/3}; \\ x^2 = y,\ y^2 = x &\implies x = 0,\ x = 1; \\ x^2 = y,\ y^2 = 2x &\implies x = 0,\ x = 4^{1/6}; \\ x^2 = 2y,\ y^2 = 2x &\implies x = 0,\ x = 2. \end{aligned}$$



El área es entonces

$$A = \int_1^{4^{1/6}} [x^2 - \sqrt{x}]\,dx + \int_{4^{1/6}}^{4^{1/3}} [\sqrt{2x} - \sqrt{x}]\,dx + \int_{4^{1/3}}^{2} [\sqrt{2x} - x^2/2]\,dx = \frac{1}{3}.$$

PROBLEMA 11.31

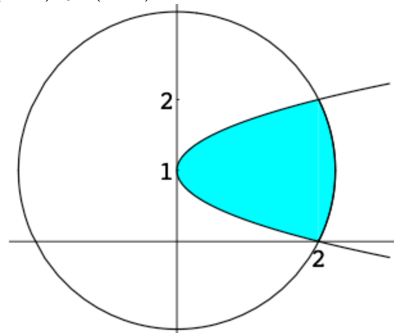
Calcular el área de la figura interior a la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 5$ y a la parábola $x = 2(y-1)^2$.

Solución

Los puntos de intersección de ambas curvas son:

$$x^2 + (y-1)^2 = 5,\ x/2 = (y-1)^2 \Longrightarrow 2x^2 + x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 2,\ x = -5/2.$$

Como la parábola está definida en $x \geq 0$, sólo es posible la solución $x = 2$ lo que da los puntos $(2,0)$ y $(2,2)$.



Como debemos descomponer la integral en dos sumandos para integrar res-

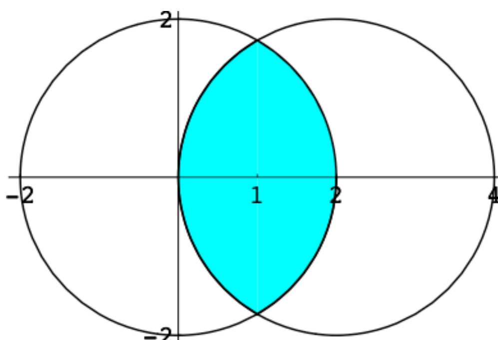
pecto a la variable x, integramos respecto a y, lo que da lugar a:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \left[\sqrt{5-(y-1)^2} - 2(y-1)^2\right] \, dy \\ &= \left[\frac{5}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{y-1}{\sqrt{5}} + \frac{y-1}{2}\sqrt{5-(y-1)^2} - \frac{2}{3}(y-1)^3\right]_0^2 = 5 \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.32

Encontrar el área de la región común a las circunferencias $C_1 : x^2 + y^2 = 4,\ C_2 : x^2 + y^2 = 4x$.

Solución



Los puntos de intersección de las circunferencias son $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$, de modo que, si integramos respecto a la variable y, el área puede expresarse como la integral

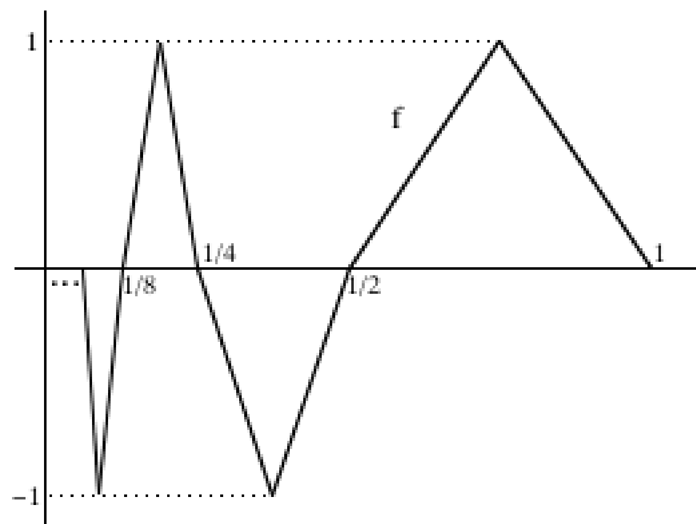
$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\sqrt{3}} [\sqrt{4-y^2} - (2-\sqrt{4-y^2})] \, dy = 4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - 1) \, dy \\ &= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{2} - y\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.33

Sea f *la función indicada en la figura adjunta.*

Hallar $\int_0^1 f$ *y también el área de la región comprendida entre la función* f *y el eje* X.

Solución



El área será la suma de las áreas de los triángulos que la función determina con el eje OX. Resulta entonces la siguiente serie geométrica:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \right) \cdot 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1}{2}.$$

Para calcular la integral, debemos sumar las áreas de los triángulos que queden por encima del eje OX y restarle la suma de las áreas de los triángulos que quedan por debajo del mismo. Tenemos nuevamente las series geométricas,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n+1}} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n-1}} - \frac{1}{2^{2n}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1/4}{1 - 1/4} - \frac{1/8}{1 - 1/4} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

B. CÁLCULO DE VOLÚMENES.

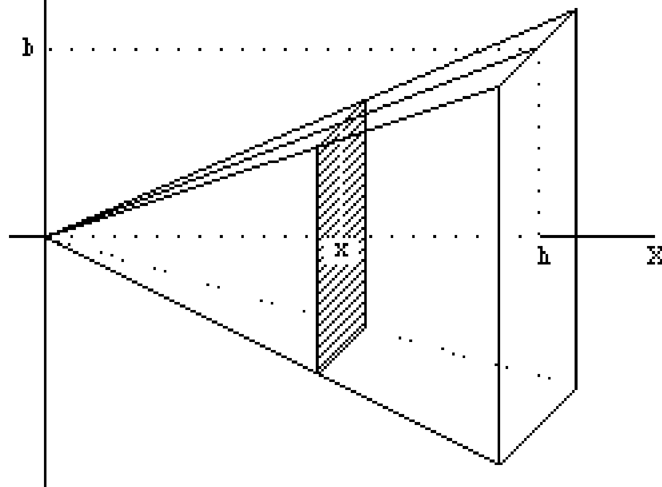
El concepto de integral también puede aplicarse para calcular volúmenes de ciertos sólidos. Los distintos casos y métodos utilizados son los que exponemos a continuación.

B.1.- VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE SECCIÓN CONOCIDA.

Supongamos que un sólido está limitado por dos planos paralelos entre sí y perpendiculares a un eje fijo t en los puntos $t = t_0$ y $t = t_1$. Supongamos además que las secciones producidas en el sólido por planos perpendiculares al eje t son regiones cuya área se puede escribir como una función $A(t)$ integrable en $[t_0, t_1]$. Entonces el volumen de dicho sólido verifica la fórmula de Cavalieri

$$V = \int_{t_0}^{t_1} A(t)\, dt. \tag{1}$$

En particular, si las secciones son perpendiculares al eje OX entre los valores x_0 y x_1, $V = \int_{x_0}^{x_1} A(x)\, dx$.



Así, en el ejemplo de la figura tenemos una pirámide de base b y altura h y las secciones perpendiculares al eje OX son cuadrados.

Para calcular el lado de un cuadrado genérico escribimos la ecuación de la recta que une el origen con el punto (h, b) y calculamos su valor en el punto de abscisa x. Resulta pues $y = bx/h$ con lo que la función a integrar será el área del cuadrado $A(x) = (2y)^2 = (2bx/h)^2$ y el volumen es

$$V = \int_0^h (2bx/h)^2\, dx = \frac{4b^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{4b^2 h}{3}.$$

B.2.- VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN.

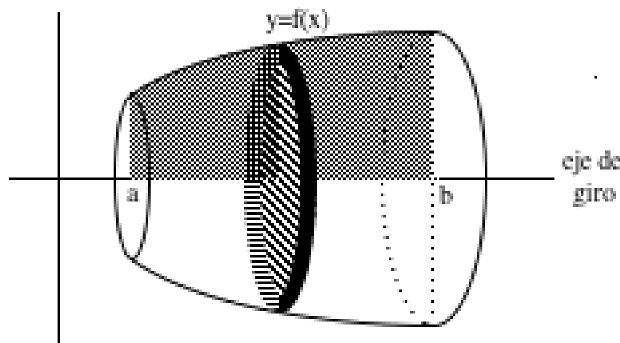
El sólido de revolución es la figura obtenida al girar una región plana alrededor de un eje fijo (eje de revolución o eje de giro). Esto quiere decir que las secciones perpendiculares a dicho eje son círculos (o coronas circulares). El volumen se obtiene según el caso con los siguientes métodos: B.2.1.-

MÉTODO DE LOS DISCOS.

Consiste en interpretar el volumen como límite de la suma de los volúmenes de los discos que se obtienen al cortar la figura por planos perpendiculares al eje de giro. Podemos distinguir dos casos:

(*) **El eje de giro forma parte del contorno de la región plana.**

Si consideramos la región plana limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de giro y las rectas $x = a$, $x = b$, las secciones perpendiculares al eje de giro son círculos con lo que debemos integrar la función que corresponda al área de los mismos en el intervalo correspondiente.



Así, si el eje de giro es el eje OX, tenemos la fórmula

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx. \tag{2}$$

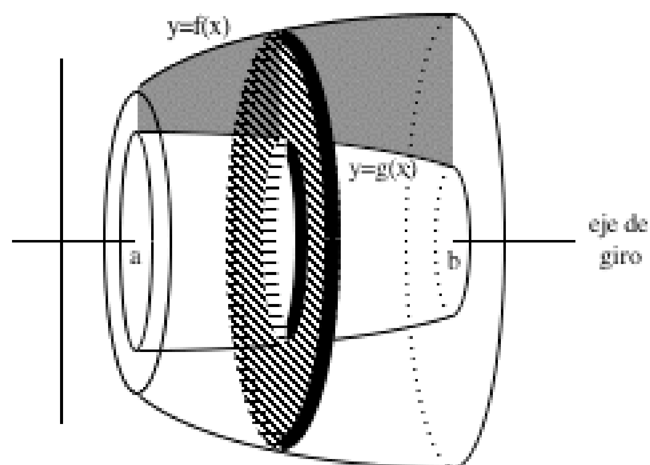
Si el eje de giro es la recta $y = r$, el radio del círculo en un punto de abscisa x es $|f(x) - r|$ y el volumen queda entonces:

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - r]^2 \, dx. \tag{3}$$

En otros casos se procede de forma similar.

(**) **El eje de giro no forma parte del contorno de la región plana.**

Consideramos ahora la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y dos rectas perpendiculares al eje de giro, siendo éste exterior a la región. En este caso, las secciones perpendiculares al eje de giro son coronas circulares. Debemos pues restar el área del círculo exterior menos el área del círculo interior.



Si el eje de giro es el eje OX,

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx. \tag{4}$$

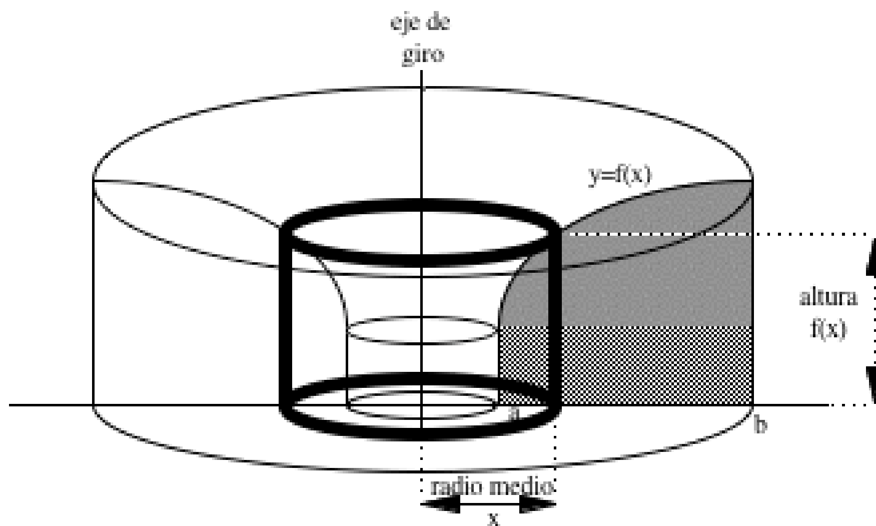
Análogamente, si el eje de giro es la recta $y = r$,

$$V = \pi \int_a^b ([f(x) - r]^2 - [g(x) - r]^2)\, dx. \tag{5}$$

Será necesario conocer la posición relativa de las funciones f y g para lo cual es fundamental tener una idea de las gráficas de las mismas.

B.2.2.- MÉTODO DE LOS TUBOS.

Este método consiste en interpretar el volumen como límite de la suma de los volúmenes de los tubos obtenidos al girar alrededor del eje de giro las franjas de espesor infinitesimal que determina en la región una partición del intervalo. Este método será apropiado cuando al intentar aplicar el método de los discos se deba descomponer la integral en varios sumandos.



Como el volumen de cada uno de estos tubos es $2\pi\cdot$ radio medio $\cdot$ altura, el volumen obtenido al girar la región comprendida entre la función $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$, $x = b$ tiene las siguientes fórmulas.

Cuando el eje de giro es el eje OY:

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx. \tag{6}$$

Cuando el eje de giro es la recta vertical $x = r$:

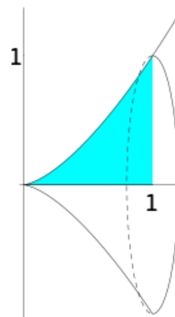
$$V = 2\pi \int_a^b |x - r| \cdot f(x)\, dx. \tag{7}$$

Fórmulas análogas se obtienen para regiones comprendidas entre dos funciones o para ejes horizontales. En los siguientes problemas se realizan ejemplos de todos los casos indicados.

PROBLEMA 11.34

Hallar el volumen de la figura engendrada al girar la curva $y^2 = x^3$ alrededor del eje X a lo largo del intervalo $x \in [0, 1]$.

Solución



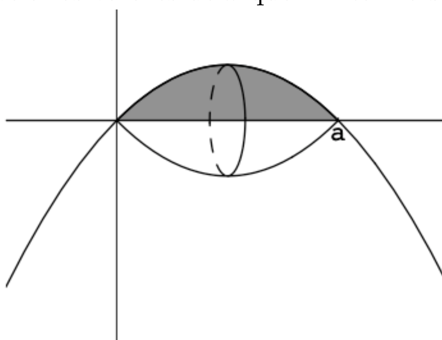
De acuerdo con la figura, y aplicando la fórmula (2), tenemos:

$$V = \pi \int_0^1 x^3\, dx = \pi \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

> **PROBLEMA 11.35**
>
> Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación, alrededor del eje OX, de la superficie limitada por el eje OX y la parábola $y = ax - x^2$ $(a > 0)$.

Solución

Aplicamos directamente el método de los discos integrando en el intervalo $[0, a]$ que corresponde a los valores de x que limitan la superficie dada.



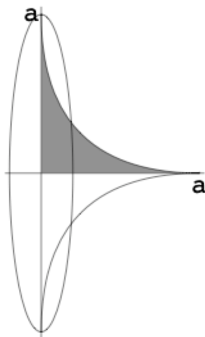
Así:

$$V = \pi \int_0^a (ax - x^2)^2\, dx = \pi \int_0^a (a^2x^2 + x^4 - 2ax^3)\, dx = \frac{\pi a^5}{30}.$$

PROBLEMA 11.36

Calcular el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región limitada por los ejes coordenados y la curva de ecuación $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ alrededor del eje OX.

Solución



De la ecuación de la curva se obtiene que $y^2=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4=a^2+x^2+6ax-4a^{3/2}x^{1/2}-4a^{1/2}x^{3/2}$. El volumen buscado es pues

$$V=\pi\int_0^a y^2(x)\,dx=\pi\int_0^a (a^2+x^2+6ax-4a^{3/2}x^{1/2}-4a^{1/2}x^{3/2})\,dx=\frac{\pi a^3}{15}.$$

PROBLEMA 11.37

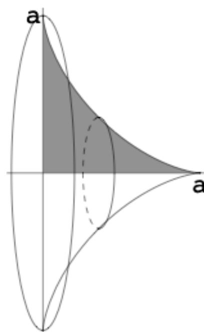
Los semiejes positivos y un cuadrante de la astroide de ecuación $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$ delimitan una región cuya área designaremos por S. Se pide:

i) El volumen del cuerpo de revolución engendrado por S al girar en torno al eje OX.

ii) El volumen del cuerpo de revolución engendrado por S al girar en torno al eje OY.

Solución

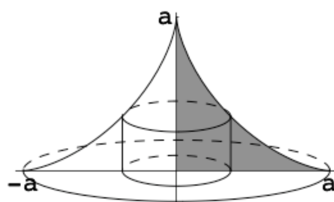
i)



Por el método de los discos, si integramos respecto al parámetro t, como los valores extremos $x = 0$ y $x = a$ corresponden a $t = \pi/2$ y $t = 0$, respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a y^2(t)\ dx(t) = \pi \int_{\pi/2}^0 a^2 \operatorname{sen}^6 t \cdot (-3a \cos^2 t \operatorname{sen} t)\ dt \\ &= 3\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 t \cos^2 t dt = -3\pi a^3 \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3\cos^5 t}{5} + \frac{3\cos^7 t}{7} - \frac{\cos^9 t}{9} \right]_0^{\pi/2} = \frac{16\pi a^3}{105} \end{aligned}$$

ii)



Utilizaremos en este caso el método de integración por tubos. El volumen es

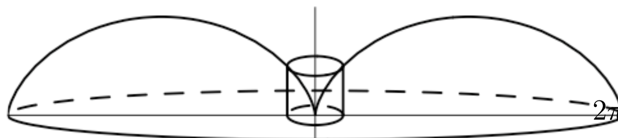
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a x(t)y(t)\ dx(t) = 2\pi \int_{\pi/2}^0 a\cos^3 t \cdot a \operatorname{sen}^3 t \cdot (-3a \cos^2 t \operatorname{sen} t)\ dt \\ &= 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^5 t \operatorname{sen}^4 t\, dt = 6\pi a^3 \left[\frac{\operatorname{sen}^5 t}{5} - \frac{2\operatorname{sen}^7 t}{7} + \frac{\operatorname{sen}^9 t}{9} \right]_0^{\pi/2} = \frac{16\pi a^3}{105}. \end{aligned}$$

El resultado es el mismo debido a las simetrías de la figura.

PROBLEMA 11.38

Hallar el volumen engendrado por la rotación alrededor del eje OY del área limitada por el primer arco de la cicloide de ecuación $x = t - \operatorname{sen} t,\ y = 1 - \cos t$.

Solución



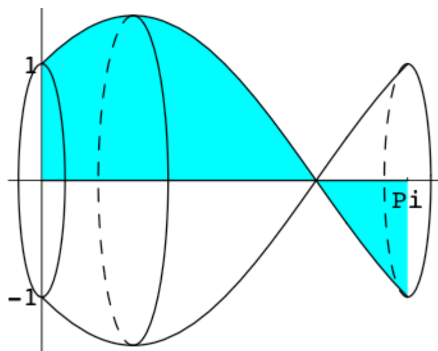
De acuerdo con la figura, si aplicamos el método de los tubos e integramos respecto al parámetro t, tenemos:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\,dx(t) = 2\pi \int_0^{2\pi} (t - \operatorname{sen} t)(1-\cos t)(1-\cos t)\,dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (t - 2t\cos t + t\cos^2 t - \operatorname{sen} t + 2\operatorname{sen} t\cos t - \cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt \\ &= 2\pi \left[\frac{3t^2}{4} - \cos t + \frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3\cos 2t}{8} - \frac{7t \operatorname{sen} t}{4} \right]_0^{2\pi} = 6\pi^3. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.39

Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por la curva $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ y el eje X en el intervalo $[0, \pi]$ alrededor del eje X.

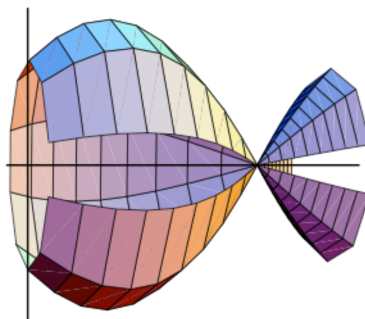
Solución



Si aplicamos el método de los discos, resulta:

$$V = \pi \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\,dx = \pi \left[x - \frac{1}{2}\cos 2x \right]_0^{\pi} = \pi^2.$$

La siguiente figura da una idea de la forma del sólido obtenido.



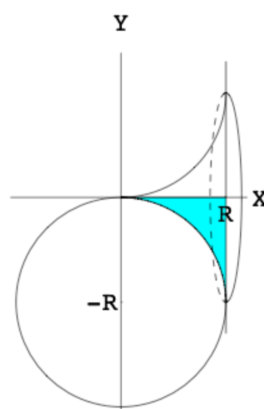
PROBLEMA 11.40

Se considera el área S de la región limitada por un cuadrante de una circunferencia de radio R y las tangentes en sus extremos. Hallar el volumen que engendra S cuando gira en torno a una de las tangentes.

Solución

Tomamos como eje OX el eje de giro y como eje OY la recta que, pasando por

el centro de la circunferencia, es paralela a la otra tangente. De este modo la ecuación de la circunferencia será $x^2 + (y+R)^2 = R^2 \Longrightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2} - R$.



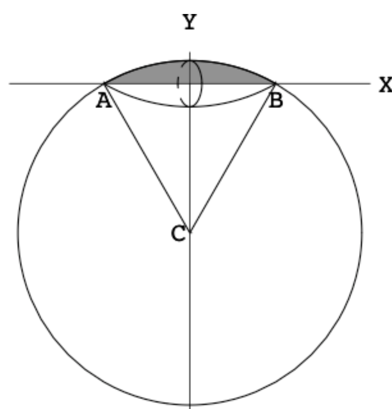
El volumen pedido viene expresado por:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^R y^2(x)\,dx = \pi \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2} - R)^2\,dx \\ &= \pi \left[2R^2 x - \frac{x^3}{3} - R^3 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{R} \right]_0^R = \frac{\pi R^3}{6}(10 - 3\pi). \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.41

Calcular el volumen engendrado por un segmento circular de ángulo central 2α (ver figura) con $\alpha < \pi/2$ y radio R al girar alrededor de su cuerda.

Solución



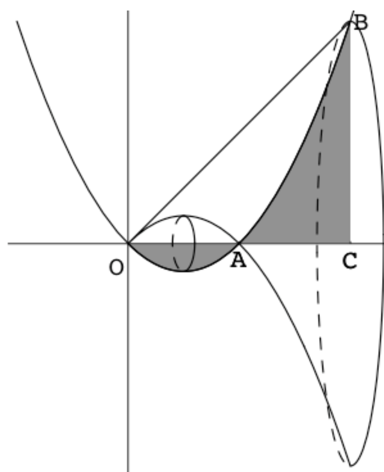
Tomando como eje OX la cuerda AB y como eje OY la perpendicular a esta cuerda que pase por el centro de la circunferencia, debido a que $OB = R \operatorname{sen} \alpha$ y $|OC| = R \cos \alpha$, la ecuación de la circunferencia es $x^2 + (y + R \cos \alpha)^2 = R^2$, de donde $y = -R \cos \alpha + \sqrt{R^2 - x^2}$. De esta forma, el volumen pedido es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R \operatorname{sen} \alpha}^{R \operatorname{sen} \alpha} y^2 \, dx = 2\pi \int_0^{R \operatorname{sen} \alpha} (R^2 \cos^2 \alpha + R^2 - x^2 - 2R \cos \alpha \sqrt{R^2 - x^2}) \, dx \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} (2 \operatorname{sen} \alpha - 3\alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha). \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.42

Se considera el arco OAB de la parábola de ecuación $y = x(x - a)$, con $OA = a > 0$ y $OC = c > a$. Determinar c de tal manera que el volumen de revolución engendrado por la zona sombreada de la figura, al girar en torno a OX, sea igual al volumen engendrado por el triángulo OCB girando en torno al mismo eje.

Solución



El volumen engendrado por la zona sombreada es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a y^2(x)\,dx + \pi \int_a^c y^2(x)\,dx = \pi \int_0^a x^2(x-a)^2\,dx + \pi \int_a^c x^2(x-a)^2\,dx \\ &= \frac{\pi c^3}{30}(6c^2 - 15ca + 10a^2). \end{aligned}$$

Como $OC = c$, $BC = c(c-a)$ y el volumen del cono engendrado por el triángulo OCB es

$$V' = \frac{\pi c^2 (c-a)^2 \cdot c}{3} = \frac{\pi c^3 (c-a)^2}{3}.$$

Igualando los valores de V y V' se deduce que $c = 5a/4$.

PROBLEMA 11.43

Al girar alrededor del eje OX la curva de ecuación $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ se obtiene en el intervalo $[0,x]$ un sólido cuyo volumen designaremos por $V(x)$. Determinar el valor de a para que $V(a) = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to\infty} V(x)$.

Solución

El volumen $V(x)$ se calcula mediante la fórmula:

$$V(x) = \pi \int_0^x y^2(x)\,dx = \pi \int_0^x \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{1+x^2}\right]_0^x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Ahora bien, como $\lim_{x\to\infty} V(x) = \frac{\pi}{2}$, deberá cumplirse $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ de donde $a = 1$ (no es válido $a = -1$ pues no está en el dominio de la función).

> **PROBLEMA 11.44**
>
> Un sólido de revolución está generado por la rotación de la gráfica de $y = f(x)$ para $[0, a]$ alrededor del eje X. Si para $a > 0$ el volumen es $a^3 + a$, hallar la función f.

Solución

Por la fórmula del volumen tenemos que

$$a^3 + a = V = \pi \int_0^a [f(x)]^2 \, dx.$$

Si llamamos G a una primitiva de f^2, es decir tal que $G'(x) = f^2(x)$, entonces

$$V = \pi[G(a) - G(0)] = a^3 + a \Longrightarrow G(a) = \frac{a^3 + a}{\pi} + G(0).$$

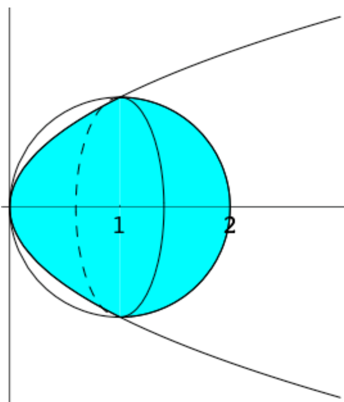
Esto sugiere definir $G(x) = \frac{x^3 + x}{\pi}$. De este modo, $G(0) = 0$ y

$$G'(x) = \frac{3x^2 + 1}{\pi} = f^2(x) \Longrightarrow f(x) = \sqrt{\frac{3x^2 + 1}{\pi}}.$$

> **PROBLEMA 11.45**
>
> Hallar el volumen de la figura engendrada al girar la superficie comprendida entre la parábola $y^2 = x$ y la circunferencia $y^2 = 2x - x^2$ alrededor del eje X.

Solución

Los puntos de intersección de ambas curvas son $(1, 1)$ y $(1, -1)$.



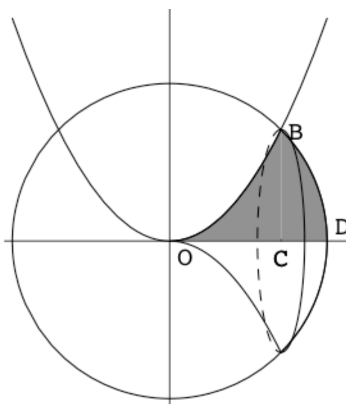
Utilizando el método de integración por discos y descomponiendo la integral en dos sumandos, tenemos

$$V = \pi \int_0^1 x \, dx + \pi \int_1^2 (2x - x^2) \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \pi \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7\pi}{6}.$$

PROBLEMA 11.46

Se considera la parábola de ecuación $y = x^2\sqrt{2}/a$, con $a > 0$, y la circunferencia $x^2+y^2 = a^2$. Determinar el volumen engendrado por la zona sombreada de la figura al girar en torno al eje OX.

Solución



Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la parábola y de la circunferencia, se tiene que $OC = a\sqrt{2}/2$. Como el radio de la circunferencia

es a, el volumen pedido será

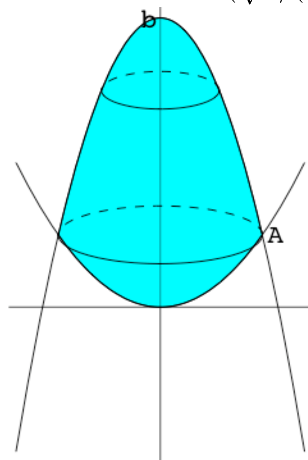
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{a\sqrt{2}/2} 2x^4/a^2 \, dx + \pi \int_{a\sqrt{2}/2}^{a} (a^2 - x^2) \, dx \\ &= \pi \left[\frac{2x^5}{5a^2} \right]_0^{a\sqrt{2}/2} + \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{a\sqrt{2}/2}^{a} = \frac{\pi a^3}{30}(20 - 11\sqrt{2}). \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.47

Determinar el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje OY la región limitada por las parábolas $y = ax^2$, $y = b - cx^2$, con $a, b, c > 0$.

Solución

Los puntos de intersección de las parábolas se obtienen resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones. Así se tiene $A(\sqrt{b/(a+c)}, ab/(a+c))$.



Calculamos el volumen por el método de los discos para lo cual debemos integrar respecto a y en los intervalos $(0, ab/(a+c))$ y $(ab/(a+c), b)$. Resulta así:

$$V = \pi \int_0^{ab/(a+c)} \frac{y}{a} \, dy + \pi \int_{ab/(a+c)}^{b} \frac{b-y}{c} \, dy = \frac{\pi b^2}{2(a+c)}.$$

PROBLEMA 11.48

Hallar el volumen generado por la rotación del área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$

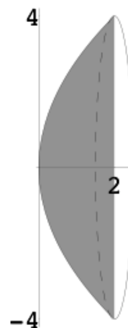
i) en torno al eje X;

ii) en torno al eje Y;

iii) en torno a la recta $x = 2$.

Solución

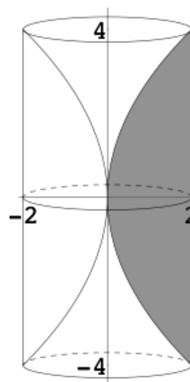
i) Dividiendo el área en franjas verticales, al girar alrededor del eje X se obtienen discos de radio $y = \sqrt{8x}$ en el intervalo $x \in [0, 2]$.



Aplicando la fórmula de integración por discos se obtiene:

$$V = \pi \int_0^2 8x \, dx = 16\pi.$$

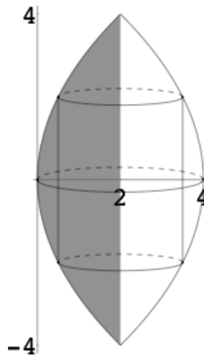
ii) Aplicaremos nuevamente el método de los discos para lo cual debemos integrar respecto a la variable y en el intervalo $[-4, 4]$.



Como un disco genérico tiene radio exterior 2 y radio interior $x = y^2/8$, el volumen viene dado por

$$V = \pi \int_{-4}^{4} [2^2 - (y^2/8)^2]\, dy = \pi \left[4y - \frac{y^5}{320}\right]_{-4}^{4} = \frac{128\pi}{5}.$$

iii) Aplicaremos en este caso el método de los tubos. Como se observa en la figura, la altura de un cilindro genérico es $2y = 2\sqrt{8x} = 4\sqrt{2x}$ y su distancia al eje de giro es $2 - x$.



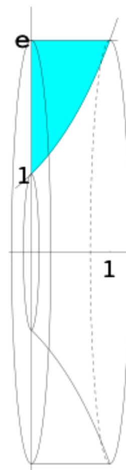
El volumen pedido será

$$V = 2\pi \int_0^2 4\sqrt{2x}(2 - x)\, dx = 8\sqrt{2}\pi \int_0^2 (2x^{1/2} - x^{3/2})\, dx = \frac{256\pi}{15}.$$

PROBLEMA 11.49

¿Cuál es el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje X la figura limitada por la curva $y = e^x$ y las rectas $x = 0$, $y = e$?

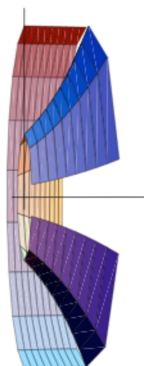
Solución



Como la recta $y = e$ queda por encima de la curva $y = e^x$ en el intervalo $[0, 1]$, si aplicamos la fórmula (4), el volumen viene dado por:

$$V = \pi \int_0^1 (e^2 - e^{2x})\, dx = \pi \left[e^2 x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \pi \cdot \frac{e^2 + 1}{2}.$$

Una idea del sólido obtenido se expresa en la siguiente figura.

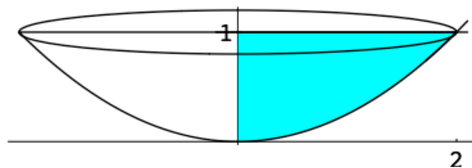


PROBLEMA 11.50

Se considera la región del plano formada por los puntos (x, y) que satisfacen las desigualdades $0 \le x \le 2$, $x^2/4 \le y \le 1$. Calcular el volumen del sólido obtenido al girar esta región alrededor del eje Y, alrededor del eje X, alrededor de la recta $x = 2$, y alrededor de la recta $y = 1$.

Solución

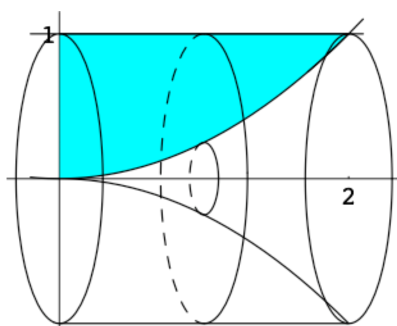
a)



Al girar alrededor del eje Y, el volumen (por el método de los discos) es

$$V = \pi \int_0^1 4y\, dy = \pi \left[2y^2\right]_0^1 = 2\pi.$$

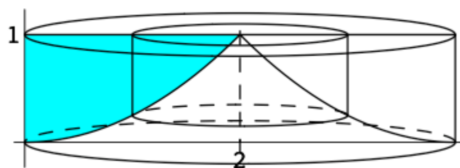
b)



Nuevamente por el método de los discos, si integramos respecto a x, tenemos:

$$V = \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{x^4}{16}\right) dx = \pi \left[x - \frac{x^5}{80}\right]_0^2 = \frac{8\pi}{5}.$$

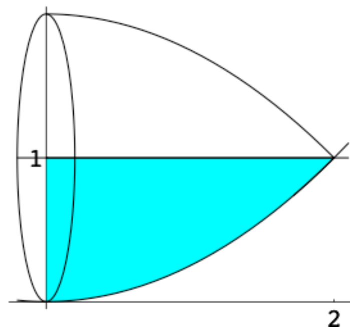
c)



Aplicando en esta ocasión el método de los tubos tenemos:

$$V = 2\pi \int_0^2 (2-x)(1-x^2/4)\, dx = 2\pi \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{16}\right]_0^2 = \frac{10\pi}{3}.$$

d)



Integrando por el método de los discos, tenemos por último que

$$V = \pi \int_0^2 (1 - x^2/4)^2 \, dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{80} \right]_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

PROBLEMA 11.51

Hallar el volumen generado por la rotación del área limitada por $y = -x^2 - 3x + 6$, $x + y - 3 = 0$ alrededor de la recta

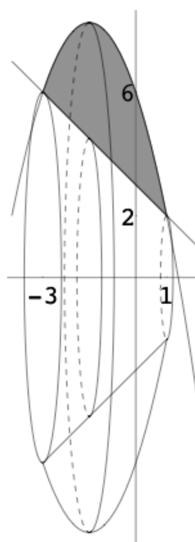
i) $y = 0$;

ii) $x = 3$.

Solución

i) Los puntos de intersección de las curvas son

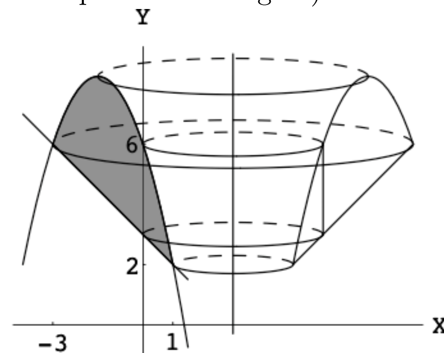
$$y = -x^2 - 3x + 6, \ y = 3 - x \Longrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3, \ x = 1.$$



Si aplicamos el método de los discos, como la parábola queda por encima de la recta en el intervalo $x \in [-3, 1]$, el volumen es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^{1} (y_p^2 - y_r^2)\, dx = \pi \int_{-3}^{1} [(-x^2 - 3x + 6)^2 - (3 - x)^2]\, dx \\ &= \pi \int_{-3}^{1} (x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27)\, dx = \frac{1792\pi}{15}. \end{aligned}$$

ii) La recta $x = 3$ es exterior a la región que gira. Aplicamos en este caso el método de las tubos. La altura de un cilindro genérico es $y_p - y_r = (-x^2 - 3x + 6) - (3 - x) = -x^2 - 2x + 3$ y el radio es $3 - x$ (distancia del eje de giro a un punto de la región).



El volumen es pues

$$V = 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)(-x^2-2x+3)\, dx = 2\pi \int_{-3}^{1} (x^3-x^2-9x+9)\, dx = \frac{256\pi}{3}.$$

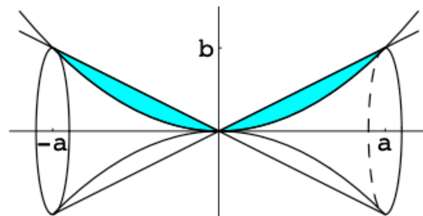
PROBLEMA 11.52

Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por las gráficas de $f(x) = b(x/a)^2$ y $g(x) = b|x/a|$ alrededor de $y = 0$.

Solución

Los puntos de intersección de ambas curvas son:

$$x \geq 0 : y = \frac{bx^2}{a^2},\ y = \frac{bx}{a} \Longrightarrow \frac{bx^2}{a^2} = \frac{bx}{a} \Longrightarrow x^2 - ax = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = a.$$



Debido a la simetría de la figura, como la recta queda por encima de la parábola, el volumen es:

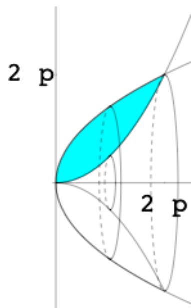
$$V = 2\pi \int_0^a \left(\frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2x^4}{a^4} \right) dx = 2\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2} \right]_0^a = \frac{4\pi b^2 \cdot a}{15}.$$

PROBLEMA 11.53

Calcular el volumen engendrado por la región que delimitan las parábolas $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ $(p > 0)$, al girar en torno a OX.

Solución

Se obtiene fácilmente que los puntos de intersección de las parábolas son $(0,0)$ y $(2p, 2p)$.



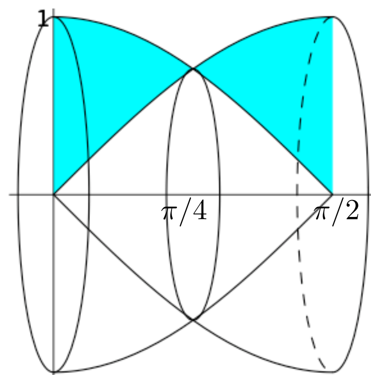
Por el método de los discos, el volumen es:

$$V = \pi \int_0^{2p} 2px\, dx - \pi \int_0^{2p} \frac{x^4}{4p^2}\, dx = \frac{12}{5}\pi p^3.$$

PROBLEMA 11.54

Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ alrededor del eje X.

Solución



Aplicando el método de los discos, debido a la posición relativa de las curvas, debemos descomponer la integral en los intervalos $[0, \pi/4]$ y $[\pi/4, \pi/2]$. Así tenemos:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\, dx + \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)\, dx \\ &= \pi \left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \right]_0^{\pi/4} - \pi \left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

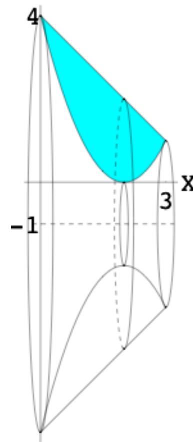
PROBLEMA 11.55

Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por las gráficas de $f(x) = x^2 - 4x + 4$ y $g(x) = 4 - x$ alrededor de $y = -1$.

Solución

Los extremos de integración serán los puntos de intersección de las curvas. Estos son:

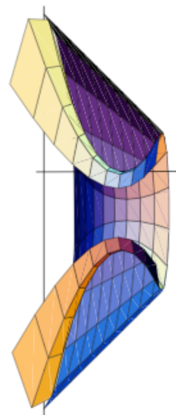
$$y = x^2 - 4x + 4,\ y = 4 - x \Longrightarrow x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 3.$$



Si aplicamos el método de los discos (fórmula (5)), teniendo en cuenta que el radio exterior es $r_e = y_r + 1 = 4 - x + 1$ y el radio interior es $r_i = y_p + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1$, resulta:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^3 [(4 - x + 1)^2 - (x^2 - 4x + 4 + 1)^2]\, dx \\
&= \pi \left[\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 25x - \frac{(x-2)^2}{5} - x - \frac{2(x-2)^3}{3} \right]_0^3 = \frac{117\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

Una sección del sólido obtenido tiene la forma de la figura adjunta.



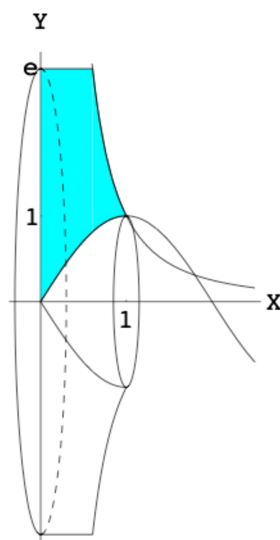
PROBLEMA 11.56

Determinar el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje de abscisas la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = 1/x^2$, $y = \text{sen}(\pi x/2)$ y las rectas $x = 0$, $y = e$.

Solución

Los puntos de intersección de las curvas son

$$\begin{aligned} y = 1/x^2,\ y = \text{sen}\,\frac{\pi x}{2} &\implies \text{sen}\,\frac{\pi x}{2} = \frac{1}{x^2} \implies x = 1; \\ y = 1/x^2,\ y = e &\implies x^2 = 1/e \implies x = 1/\sqrt{e}. \end{aligned}$$



Aplicando el método de los discos, tenemos:

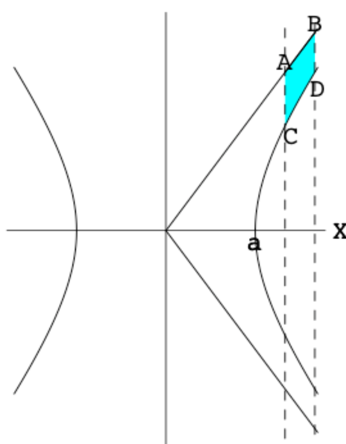
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{1/\sqrt{e}} \pi \left[e^2 - \text{sen}^2\,\frac{\pi x}{2}\right]\,dx + \int_{1/\sqrt{e}}^{1} \pi \left[\frac{1}{x^4} - \text{sen}^2\,\frac{\pi x}{2}\right]\,dx \\ &= \pi \left[e^2 x - \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\,\pi x}{2\pi}\right]_0^{1/\sqrt{e}} + \pi \left[\frac{-1}{3x^3} - \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\,\pi x}{2\pi}\right]_{1/\sqrt{e}}^{1} = \frac{(8e\sqrt{e} - 5)\pi}{6}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.57

Se considera la hipérbola de ecuación $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ y las dos rectas perpendiculares al eje OX de ecuaciones $x = p$, $x = p + h$ $(p > a)$.

Determinar el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la región $ABCD$ indicada en la figura (siendo OB una de las asíntotas) al girar en torno al eje OX.

Solución



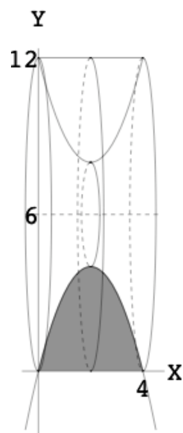
Sabiendo que la ecuación de la asíntota OB es $y = bx/a$, el volumen del sólido indicado viene dado por

$$V = \pi \int_p^{p+h} \left[\left(\frac{bx}{a} \right)^2 - b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \right] dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_p^{p+h} (x^2 - x^2 + a^2)\, dx = \pi b^2 h.$$

PROBLEMA 11.58

Hallar el volumen generado por el área comprendida entre la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje X al girar alrededor de la recta $y = 6$.

Solución



Utilizando el método de los discos, como la región está comprendida en el intervalo $[0,4]$, el volumen, dado por la fórmula (5), es

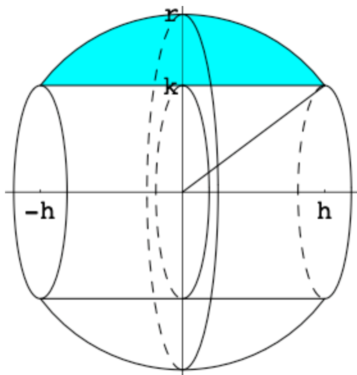
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 [6^2 - (6-y)^2]\,dx = \pi \int_0^4 [36 - (6-4x+x^2)^2]\,dx \\ &= \pi \int_0^4 (48x - 28x^2 + 8x^3 - x^4)\,dx = \frac{1408\pi}{15}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.59

Un servilletero se obtiene practicando un agujero cilíndrico en una esfera de modo que el eje de aquél pase por el centro de ésta. Si la longitud del agujero es $2h$, demostrar que el volumen del servilletero es $\pi a h^3$, siendo a un número racional.

Solución

Si llamamos r al radio de la esfera, el radio del agujero cilíndrico será $k = \sqrt{r^2 - h^2}$.

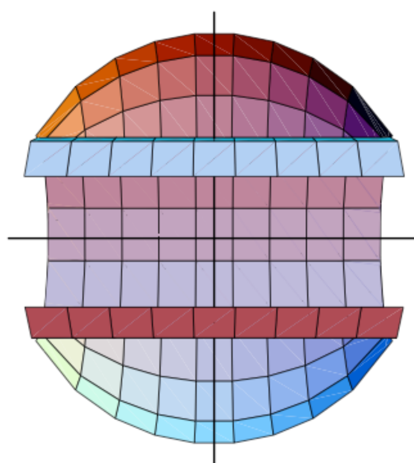


De este modo, y de acuerdo con la figura, el sólido obtenido viene dado al girar alrededor del eje X la región limitada por las curvas $x^2 + y^2 = r^2$ e $y = k$. Tenemos entonces:

$$V = \pi \int_{-h}^{h} (r^2 - x^2 - k^2)\, dx = \pi \left[(r^2 - k^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-h}^{h} = \frac{4\pi h^3}{3}.$$

Como $4/3$ es racional, el resultado obtenido prueba el enunciado.

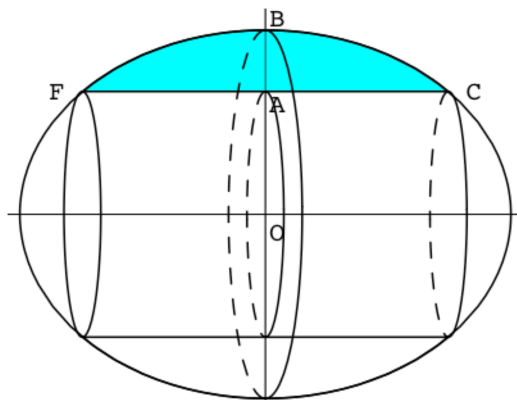
Una sección de la figura obtenida es la siguiente:



PROBLEMA 11.60

Se considera la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y la cuerda FC paralela al eje OX. Determinar $OA = h$ de manera que el volumen engendrado por la región sombreada de la figura al girar en torno a OX sea la mitad del volumen del elipsoide engendrado por el área que limita la elipse dada girando en torno al mismo eje.

Solución



Designaremos por V_1 y V_2 a los volúmenes del cuerpo engendrado por la región sombreada y del elipsoide engendrado por la elipse, respectivamente. Como los puntos C y F tienen abscisa $a\sqrt{1-h^2/b^2}$ y $-a\sqrt{1-h^2/b^2}$, respectivamente, dichos volúmenes se obtienen por integración mediante las fórmulas:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \pi\int_{-a\sqrt{1-h^2/b^2}}^{a\sqrt{1-h^2/b^2}}[b^2(1-x^2/a^2)-h^2]\,dx \\
&= 2\pi\int_0^{a\sqrt{1-h^2/b^2}}[b^2(1-x^2/a^2)-h^2]\,dx = 2\pi\left[(b^2-h^2)x-\frac{b^2x^3}{3a^2}\right]_0^{a\sqrt{1-h^2/b^2}} \\
&= \frac{4}{3}\pi a(b^2-h^2)\sqrt{1-h^2/b^2}; \\
V_2 &= \pi\int_{-a}^{a} b^2(1-x^2/a^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi ab^2.
\end{aligned}$$

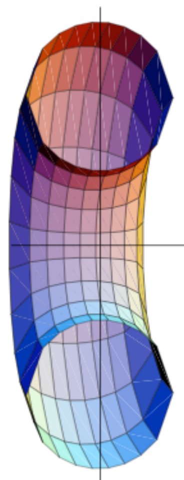
Como debe ser $V_1 = V_2/2$, al resolver esta ecuación se obtiene que

$$\frac{4}{3}\pi a(b^2-h^2)\sqrt{1-h^2/b^2} = \frac{2}{3}\pi ab^2 \Longrightarrow h = b\sqrt{1-1/\sqrt[3]{4}}.$$

PROBLEMA 11.61

Calcular el volumen del toro, que es el sólido de revolución engendrado al girar un círculo de radio r alrededor de un eje situado en su plano y a una distancia b de su centro ($b \geq r$).

Solución



Si hacemos que OX sea el eje de giro y el centro de la circunferencia el punto $(0, b)$, ésta tiene por ecuación $x^2 + (y - b)^2 = r^2$. El volumen, aplicando el método de los discos, vendrá dado por:

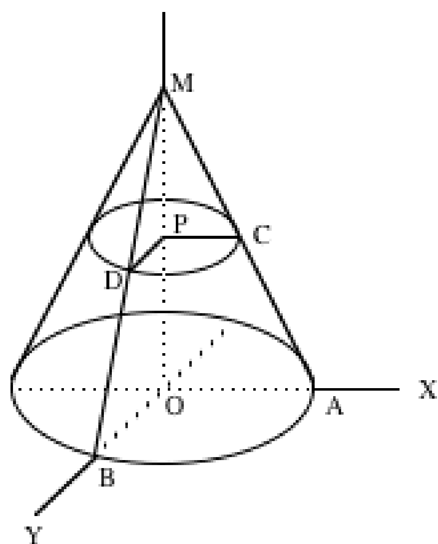
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} \left[\left(b + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \right] dx = \text{(cambio } x = r \operatorname{sen} t) \\ &= 4b\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2 t \, dt = 2br^2\pi \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2br^2\pi^2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.62

Hallar el volumen de un cono recto de altura h, cuya base es una elipse de eje mayor $2a$ y eje menor $2b$.

Solución

La sección determinada en el cono por un plano paralelo a la base y de altura $OP = z$ es una elipse de eje mayor $2x$ y eje menor $2y$. Su área es pues πxy.



Por semejanza de triángulos, se deduce de la figura que

$$\overset{\triangle}{MPC} \sim \overset{\triangle}{MOA} \Longrightarrow \frac{PC}{OA} = \frac{PM}{OM} \qquad \text{es decir } \frac{x}{a} = \frac{h-z}{h};$$
$$\overset{\triangle}{MPD} \sim \overset{\triangle}{MOB} \Longrightarrow \frac{PD}{OB} = \frac{PM}{OM} \qquad \text{es decir } \frac{y}{b} = \frac{h-z}{h}.$$

El área de la sección es entonces $\pi xy = \dfrac{\pi ab(h-z)^2}{h^2}$. Luego,

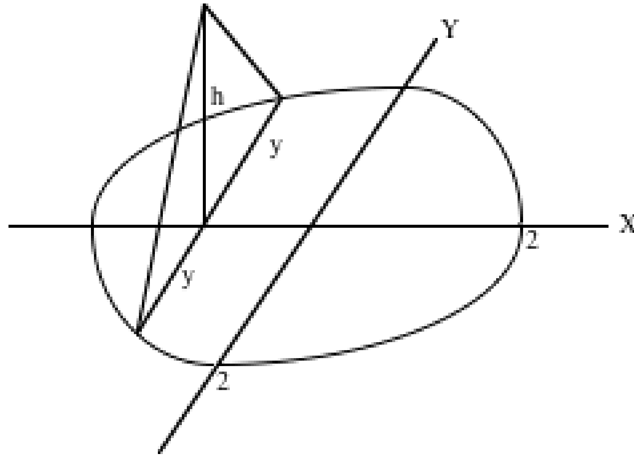
$$V = \frac{\pi ab}{h^2} \int_0^h (h-z)^2 dz = \frac{\pi abh}{3}.$$

PROBLEMA 11.63

Un sólido tiene una base circular de radio 2. Cada sección producida por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. Calcular el volumen del sólido.

Solución

Si expresamos por la ecuación $x^2+y^2 = 4$ a la base del sólido y consideramos las secciones perpendiculares al eje X, el lado de un triángulo genérico es $l = 2y$ y la altura es $h = \sqrt{l^2 - l^2/4} = l\sqrt{3}/2 = y\sqrt{3}$.



El volumen será entonces

$$V = \int_{-2}^{2} \frac{2y \cdot y\sqrt{3}}{2}\, dx = \sqrt{3}\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \frac{32\sqrt{3}}{3}.$$

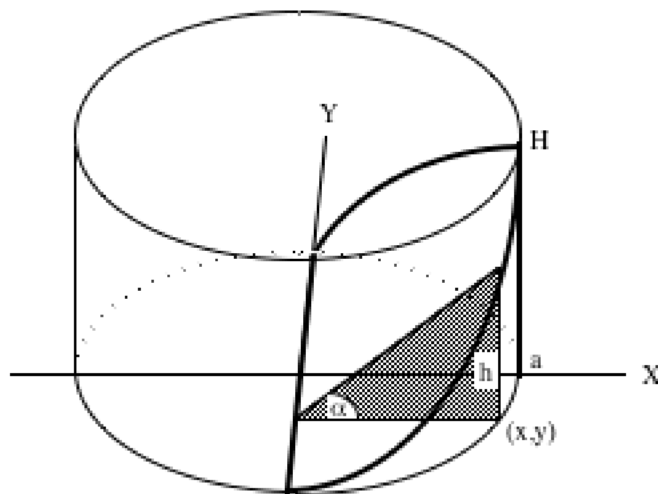
PROBLEMA 11.64

Un cilindro cuya base es una elipse se corta por un plano inclinado que pasa por el eje menor de la misma. Hallar el volumen del sólido restante.

Solución

Supongamos que la ecuación de la elipse es $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y llamamos H a la altura del cilindro (que corresponde al punto $(a, 0)$). Cortando el sólido por planos perpendiculares al eje OY obtenemos triángulos rectángulos semejantes. En un punto arbitrario (x, y) el área de uno de dichos triángulos (ver figura) es

$$A = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{x^2 \cdot H}{2a}.$$



Como (x, y) verifica la ecuación de la elipse, escribimos el área en función de y como $A(y) = \dfrac{a^2(1 - y^2/b^2) \cdot H}{2a}$. El volumen será entonces

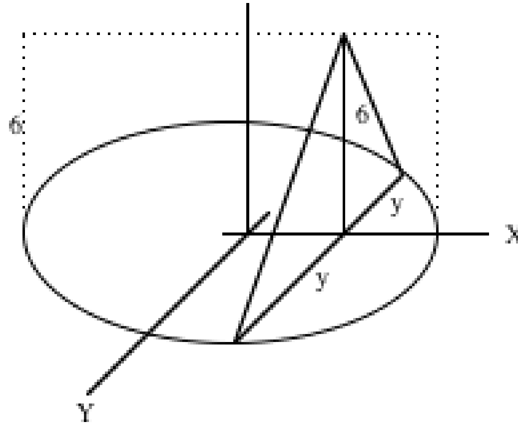
$$V = \int_{-b}^{b} A(y)\,dy = 2\int_0^b \frac{a(1 - y^2/b^2) \cdot H}{2}\,dy = aH\left[y - \frac{y^3}{3b^2}\right]_0^b = \frac{2abH}{3}.$$

PROBLEMA 11.65

Un sólido tiene una base en forma de elipse cuyos ejes mayor y menor miden 10 y 8 unidades respectivamente. Hallar su volumen sabiendo que toda sección del mismo perpendicular al eje mayor es un triángulo isósceles de altura igual a 6.

Solución

Escribimos la ecuación de la elipse como $x^2/25 + y^2/16 = 1$.



El triángulo obtenido por la sección perpendicular al eje OX por un punto x tiene área $A(x) = 2y \cdot h/2 = 6y = 24\sqrt{1 - x^2/25}$, y el volumen del sólido (aplicando los métodos usuales de integración) es

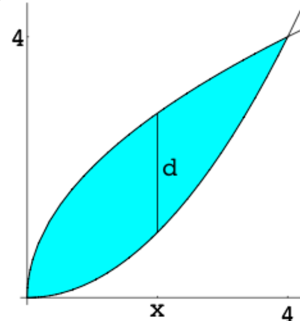
$$\begin{aligned} V &= \int_{-5}^{5} A(x)\,dx = 24\int_{-5}^{5} \sqrt{1 - x^2/25}\,dx \\ &= \frac{24}{5}\left[\frac{25}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{5} + \frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2}\right]_{-5}^{5} = 60\pi. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.66

La sección de un cierto sólido por cualquier plano perpendicular al eje OX es un cuadrado tal que los extremos de una diagonal pertenecen respectivamente a las parábolas $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$. Hallar el volumen del sólido.

Solución

La región que limitan ambas curvas viene indicada en la figura y los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(4, 4)$.

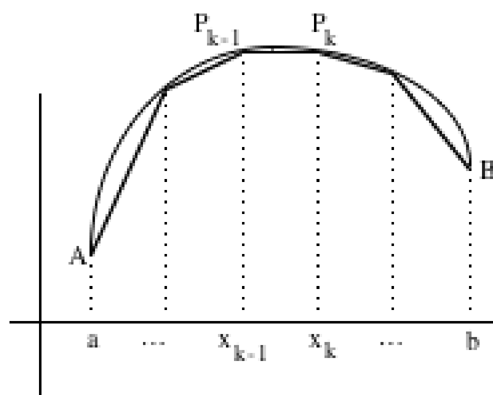


Como indica el enunciado, la diagonal de un cuadrado genérico une los puntos (x, y_1) y (x, y_2) y su longitud, en función de x es $d = 2\sqrt{x} - x^2/4$. Como el área del cuadrado es $A(x) = d^2/2 = (2\sqrt{x} - x^2/4)^2/2$, el volumen pedido es:

$$V = \int_0^4 \frac{(2\sqrt{x} - x^2/4)^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[2x^2 + \frac{x^5}{80} - \frac{2x^{7/2}}{7}\right]_0^4 = \frac{144}{35}.$$

C. LONGITUD DE CURVAS PLANAS.

Dada la función $y = f(x)$, definida en un intervalo $[a, b]$, a cada partición $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ de $[a, b]$ le corresponde una poligonal de vértices $P_k = (x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, \dots, n$, como indica la figura.



La longitud del arco de la curva entre los puntos A y B de abscisas $x = a$ y $x = b$ se define como el supremo de los perímetros de todas las poligonales. Si es finito, se dice que la curva es *rectificable*; si no, la curva no es rectificable (tiene longitud infinita). El resultado fundamental que aplicaremos en esta sección es el siguiente:

Teorema. *Si una función $y = f(x)$ tiene derivada de primer orden continua en $[a, b]$, entonces es rectificable y la longitud del arco viene dada por la fórmula*

$$l = AB = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Si la función viene expresada en coordenadas paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, la fórmula queda de la forma

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt,$$

siendo t_0 y t_1 los parámetros correspondientes a los puntos inicial y final de la curva.

En la mayoría de los casos no es posible encontrar expresiones explícitas de la longitud de un arco de curva. Por ello se deben crear nuevas funciones, como es el caso de las integrales elípticas (que expresan longitudes de arcos de elipses), o utilizar métodos aproximados para calcular arcos de curva.

PROBLEMA 11.67

Hallar la longitud del arco de la parábola $x^2 = 2py$, *con* $p > 0$, *comprendida en el intervalo* $[0, a]$.

Solución

Si calculamos la derivada de la función, tenemos

$$y' = x/p \Longrightarrow \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + (x/p)^2} = \frac{\sqrt{x^2 + p^2}}{p}.$$

La longitud del arco pedido queda entonces

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{p} \int_0^a \sqrt{x^2 + p^2}\, dx = \frac{p}{2} \left[\frac{x\sqrt{x^2 + p^2}}{p^2} + \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p} \right| \right]_0^a \\ &= \frac{p}{2} \left[\frac{a\sqrt{a^2 + p^2}}{p^2} + \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + p^2}}{p} \right| \right]. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.68

Probar que la curva $f(x) = \begin{cases} x\cos(\pi/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ *no es rectificable en* $[0, 1]$.

Solución

Si consideramos los puntos $x_n = 1/n$, con $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $f(x_n) = \dfrac{(-1)^n}{n}$ y la longitud de la poligonal de vértices x_n es

$$\sum_{n\geq 1} l_n = \sum_{n\geq 1} \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n},$$

que es una serie divergente. Esto prueba que la curva no es rectificable en $[0,1]$.

PROBLEMA 11.69

Calcular la longitud del arco de curva $y = \ln(\cos x)$ *en el intervalo* $[0, \pi/3]$.

Solución

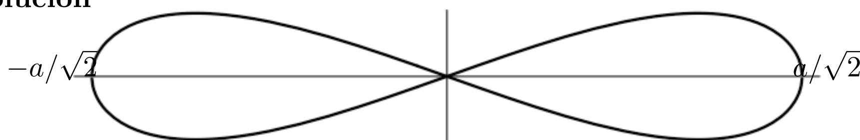
Como la derivada de la función es $y' = -\operatorname{tg} x$, la longitud pedida es

$$l = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx = \big[\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)\big]_0^{\pi/3} = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

PROBLEMA 11.70

Hallar la longitud de la curva de ecuación $8a^2y^2 = x^2(a^2 - 2x^2)$.

Solución



Si escribimos la ecuación en forma explícita, tenemos $y = \pm \dfrac{x}{2\sqrt{2}a}\sqrt{a^2 - 2x^2}$, de donde $y'^2 = \dfrac{(a^2 - 4x^2)^2}{8a^2(a^2 - 2x^2)}$ y $\sqrt{1 + y'^2} = \dfrac{3a^2 - 4x^2}{2\sqrt{2}a\sqrt{a^2 - 2x^2}}$.

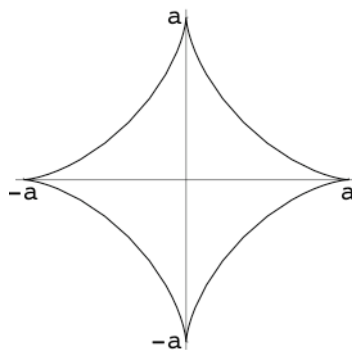
La longitud del arco será:

$$\begin{aligned} L &= 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}a}\int_0^{a/\sqrt{2}}\frac{3a^2-4x^2}{\sqrt{a^2-2x^2}}\,dx \\ &= \left[2a\cdot\operatorname{arc\,sen}\frac{x\sqrt{2}}{a}+\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot x\cdot\sqrt{a^2-2x^2}\right]_0^{a/\sqrt{2}}=\pi a. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.71

Hallar la longitud de la astroide de ecuación $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Solución



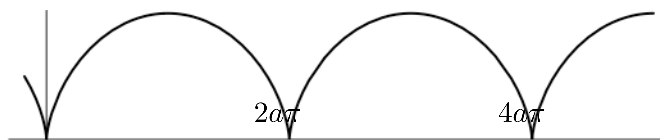
Escribiendo la ecuación en forma paramétrica como $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$ y teniendo en cuenta la simetría de la figura, la longitud viene dada por:

$$L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=4\int_0^{\pi/2}3a\operatorname{sen}t\cos t\,dt=6a.$$

PROBLEMA 11.72

Hallar la longitud de un lazo de la cicloide $x=a(t-\operatorname{sen}t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Solución



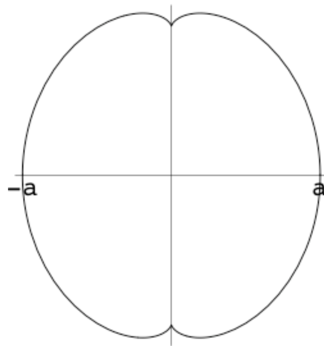
Como un lazo de la cicloide es el arco de curva comprendido en el intervalo $t \in [0, 2\pi]$, la longitud es:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt \\ &= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\, dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\operatorname{sen}(t/2)\, dt = 8a. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.73

Hallar la longitud de la curva cuya ecuación en forma paramétrica es $x(t) = a\cos^3 t,\ y(t) = a\operatorname{sen} t(1+\cos^2 t)$.

Solución

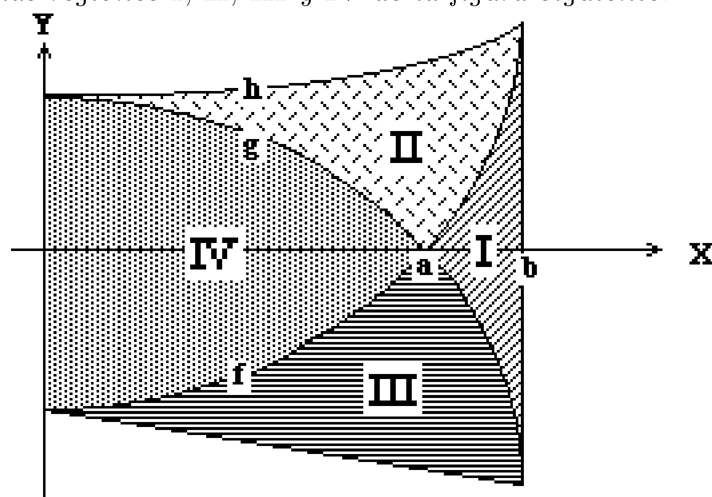


Debido a la simetría de la figura, por la fórmula de la longitud de arco tenemos:

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = 4\int_0^{\pi/2} a\cos t\sqrt{4 - 3\operatorname{sen}^2 t}\, dt = (\text{cambio} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} t &= \operatorname{sen} u) = \frac{16a}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/3} \cos^2 u\, du = \frac{8a}{\sqrt{3}}\left[u + \frac{\operatorname{sen} 2u}{2}\right]_0^{\pi/3} = \frac{2a(4\pi + 3\sqrt{3})}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

D. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Encontrar una fórmula que permita calcular el área de cada una de las regiones I, II, III y IV de la figura siguiente:



Resp.: Si llamamos $r(x) = f(0) + \dfrac{g(b) - f(0)}{b} \cdot x$ a la recta que pasa por los puntos $(0, f(0))$ y $(b, g(b))$, tenemos:

$$A_I = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx;$$

$$A_{II} = \int_0^a [h(x) - g(x)]\, dx + \int_a^b [h(x) - f(x)]\, dx;$$

$$A_{III} = \int_0^a [f(x) - r(x)]\, dx + \int_a^b [g(x) - r(x)]\, dx;$$

$$A_{IV} = \int_0^a [g(x) - f(x)]\, dx.$$

2. Hallar el área de la figura limitada por la hipérbola equilátera $xy = a^2$, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = 2a$.

   Resp.: $A = a^2 \ln 2$.

3. Hallar el área encerrada por la recta $y = 1$ y la curva $y = \ln^2 x$.

   Resp.: $A = 4/e$.

4. Calcular el área limitada por las curvas $y = (x-4)^2$, $y = 16-x^2$.

Resp.: $A = 64/3$.

5. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2 - 2x + 2$, su tangente en el punto $(3, 5)$, el eje OX y el eje OY.

   Resp.: $A = 23/8$.

6. Calcular el área de la figura del primer cuadrante limitada por las parábolas $x^2 = 2py$, $y^2 = 2px$ en el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3p^2$, $(p > 0)$.

   Resp.: $A = \frac{p^2}{24}(4\sqrt{2} + 9\pi - 36 \operatorname{arc\,sen} 1/\sqrt{3})$.

7. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = -x^2 + 6$, $(y - 2)^2 + x^2 = 4$, $y = x$.

   Resp.: $A = \frac{1}{6}(49 - 6\pi)$.

8. Hallar el área de la región limitada por la curva $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ y el eje OX en el tercer cuadrante.

   Resp.: $A = 4$.

9. Hallar el área de la región limitada por la curva $y = \frac{x}{(1 - x^2)^2} \cdot \operatorname{arc\,sen} x$ y las rectas $x = 0$, $x = 1/2$, $y = 0$.

   Resp.: $A = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

10. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = 5 - x^2$, $y = (x - 1)^2$.

    Resp.: $A = 9$.

11. Calcular el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

    Resp.: $A = \pi ab$.

12. Calcular el área de la región limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 2$, $y = x^2$, $y = x + 6$.

    Resp.: $A = \frac{45 + \pi}{2}$.

13. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = x^2 - 4x + 4$ y $g(x) = 4 - x$.

    Resp.: $A = 9/2$.

14. Calcular el área de la figura limitada por la curva $y = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje OY.

    Resp.: $A = 12$.

15. Hallar el área limitada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$.

    Resp.: $A = 4/3$.

16. Hallar el área de la superficie interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y por encima de la parábola $x^2 = 12(y - 1)$.

    Resp.: $A = \dfrac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}$.

17. Hallar el área limitada por la curva $y = \cos 2x + \cos x$ y el eje X entre las dos ordenadas que corresponden a una distancia igual a un período de la curva.

    Resp.: $A = 3\sqrt{3}$.

18. Hallar el área encerrada por el bucle de la curva $x^3 = a(x^2 - y^2)$.

    Resp.: $A = \dfrac{8a^2}{15}$.

19. Dada la hipérbola de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, determinar el área A del triángulo mixtilíneo APQ, siendo $A(a, 0)$, $P(a\sqrt{2}, b)$, $Q(a\sqrt{2}, 0)$.

    Resp.: $A = \dfrac{ab}{2}[\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})]$.

20. Hallar el área del segmento circular de centro O y radio r comprendido entre las rectas $x = a$, $x = b$.

    Resp.: $A = b\sqrt{r^2 - b^2} + r^2 \operatorname{arc\,sen} \dfrac{b}{r} - a\sqrt{r^2 - a^2} - r^2 \operatorname{arc\,sen} \dfrac{a}{r}$.

21. Hallar el área del segmento parabólico comprendido entre $y^2 = 2px$ las rectas $x = a$, $x = b$.

    Resp.: $A = \dfrac{4\sqrt{2p}}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$.

22. Hallar el volumen del sólido de revolución engendrado por la figura limitada por la curva $y = xe^x$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ al girar alrededor del eje OX.

    Resp.: $V = \dfrac{\pi e^2}{4}$.

23. Calcular el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX la región interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y a la parábola $y^2 = 3x/2$.

    Resp.: $19\pi/48$.

24. Calcular el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje OX la región limitada por la curva $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$ y el eje OX.

    Resp.: $V = \dfrac{\pi}{3}(28 - 6\pi)$.

25. Calcular el volumen del sólido limitado por las curvas $x^2 - y^2 = 4$, $y = 2$, $y = -2$ al girar alrededor del eje OX.

    Resp.: $V = \dfrac{32\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

26. Calcular el volumen del sólido limitado por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = 2x/\pi$ al girar alrededor del eje OX.

    Resp.: $V = \pi^2/6$.

27. Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por las gráficas de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 1$ en el intervalo $[0, \sqrt{3}]$ alrededor de $y = 0$.

    Resp.: $V = 2\pi\sqrt{3}$.

28. Sea R la región interior a la circunferencia de centro $(1, -1)$ y radio 2 y por encima de la recta $y = \sqrt{3} - 1$.

    a) Determinar el área de R.

b) Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región R alrededor del eje OX.

Resp.: $A = \dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$; $V = \dfrac{2\pi}{3}(2 + 3\sqrt{3} - 2\pi)$.

29. Sea R la región limitada por las curvas $x + y = 2y^2$, $y = x^3$. Calcular el área de R y el volumen que engendra R al girar alrededor del eje OX.

Resp.: $A = 7/12$ (pensar x como función de y); $V = 11\pi/21$ (método de los tubos).

30. Sea R la región limitada por las curvas $y = \dfrac{x^2}{4} + 2$ y $5x+8y-14 = 0$. Calcular el área de R y el volumen de la figura obtenida al girar R alrededor del eje OX.

Resp.: $A = 27/192$; $V = \dfrac{891\pi}{1280}$ (método de los discos).

31. Sea R la región limitada por las curvas $y = 4x - x^2$ y $2x - y = 0$. Calcular el área de R y el volumen de la figura obtenida al girar R alrededor del eje OX.

Resp.: $A = 4/3$; $V = 32\pi/5$.

32. Sea R la región limitada por las curvas $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ e $y = \dfrac{x^2}{2}$. Calcular el área de R y el volumen de la figura obtenida al girar R alrededor de los ejes OX y OY.

Resp.: $A = (3\pi - 2)/6$; $V_X = \dfrac{\pi}{20}(5\pi + 8)$ (discos); $V_Y = \dfrac{\pi}{4}(4\ln 2 - 1)$ (tubos).

33. Se considera la región R limitada por las curvas $x^2 + (y-1)^2 = 5$, $x = 2(y-1)^2$.

a) Calcular el área de R.

b) Calcular el volumen obtenido al girar la región R alrededor del eje OY.

c) Calcular el volumen obtenido al girar la región R alrededor de la recta $y = 1$.

Resp.: $A = 5 \operatorname{arc\,sen} \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{3}$; $V_Y = \dfrac{116\pi}{15}$ (discos); $V_{y=1} = \dfrac{10\sqrt{5} - 19}{3} \cdot \pi$ (tubos).

34. Dada la región limitada por las curvas $y = 4x^2$, $y = x^2/9$, $y = 2$, calcular el área de la región y el volumen obtenido al girar dicha región alrededor de los ejes OX y OY.

    Resp.: $A = 20\sqrt{2}/3$; $V_X = 16\pi\sqrt{2}$ (tubos); $V_Y = 35\pi/2$ (discos).

35. Dada la región limitada por las curvas $y = x^2 + 1$, $y - 1 = x$, calcular el área de la región y el volumen obtenido al girar dicha región alrededor del eje OY.

    Resp.: $A = 1/6$; $V_Y = \pi/6$.

36. Dada la región limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 12$, $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$, calcular el área de la región y el volumen obtenido al girar dicha región alrededor del eje OY.

    Resp.: $A = \dfrac{4\sqrt{2}}{3} + 12 \operatorname{arc\,sen} \sqrt{2/3} - 3\pi$; $V_Y = \dfrac{\pi}{15}(256\sqrt{5} - 200)$.

37. Se considera la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen}(\pi x/2) + \cos(\pi x/2) + 1$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$. Hallar el área de dicha región y el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje OX.

    Resp.: $A = 1 + \dfrac{4}{\pi}$; $V = 2\pi + 10$.

38. Calcular el volumen del tronco de cono con radios de las bases r y R y altura h.

    Resp.: $V = \dfrac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)$.

39. Calcular la longitud del arco de la curva $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$.

    Resp.: $L = e - e^{-1}$.

40. Calcular la longitud del arco de la curva $y = \ln \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

    Resp.: $L = \ln(e^2 + 1) - 1$.